©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Zur Theorie der Gasreibung.

Von dem c. M. **Ludwig Boltzmann** in Graz.

(Mit 7 Holzschnitten.)

I. Bemerkungen über die bisherigen Bestimmungen der Reibungsconstante, namentlich über die neuere Maxwell'sche Theorie.

Bekanntlich haben nach der dynamischen Gastheorie die verschiedenen Moleküle eines Gases nicht durchaus dieselbe Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsrichtung, sondern es sind unter denselben die verschiedensten Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitsrichtungen vertreten. Wir wollen mit N die Anzahl der Gasmoleküle in der Volumeneinheit bezeichnen. (Bei ungleichförmiger Vertheilung der Moleküle ist hierunter der Quotient des Volumens eines Volumelementes in die darinnen enthaltene Molekülzahl zu verstehen.) Ferner wollen wir mit $Ad\xi\, d\eta\, d\zeta$ die Anzahl derjenigen Moleküle in der Volumeinheit bezeichnen, für welche die nach den drei Coordinatenrichtungen geschätzten Geschwindigkeitscomponenten zwischen den Grenzen

$$\xi \text{ und } \xi+d\xi,\ \eta \text{ und } \eta+d\eta,\ \zeta \text{ und } \zeta+d\zeta$$

liegen, wobei bei ungleichförmiger Vertheilung wieder die in einem Volumelement enthaltene Anzahl durch dessen Volumen zu dividiren ist. Wir können dann A bezeichnen als die Grösse, welche die Vertheilung der Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitsrichtungen oder kürzer die Geschwindigkeitsvertheilung unter den Molekülen bestimmt.

Wir setzen im Allgemeinen

$$A = f(\xi, \eta, \zeta) \qquad 1)$$

und können dann auch f als diejenige Function bezeichnen,

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

welche die Geschwindigkeitsvertheilung unter den Molekülen bestimmt.

Wir denken uns ferner durch irgend einen Punkt im Inneren des Gases, dessen Coordinaten mit x, y, z bezeichnet werden sollen, ein unendlich kleines Flächenelement vom Flächeninhalte du senkrecht zur Y-Axe construirt und bezeichnen die in der Richtung der X-Axe geschätzte Bewegungsgrösse, welche während der unendlich kleinen Zeit dt durch dieses Flächenelement mehr in der Richtung der positiven Y-Axe als in der der negativen hindurchgeht, mit $M du\, dt$, dann kann die Grösse M bekanntlich sehr leicht berechnet werden.

Während der unendlich kleinen Zeit dt werden von sämmtlichen Gasmolekülen, deren Geschwindigkeitscomponenten zwischen den Grenzen A liegen, durch unser Flächenelement diejenigen hindurchgehen, welche zu Anfang der Zeit dt in einem schiefen Cylinder enthalten waren, dessen Basis unser Flächenelement du, dessen Höhe gleich $\eta\, dt$ ist und dessen Axe parallel der Geschwindigkeitsrichtung der betrachteten Moleküle liegt.

Das Volumen dieses schiefen Cylinders ist $dv = \eta\, du\, dt$. Die Anzahl der zu Anfang unseres Zeitelementes darin enthaltenen Moleküle ist daher

$$A d\xi d\eta d\zeta \eta du\, dt.$$

Wenn die Masse eines Moleküls mit m bezeichnet wird, so trägt jedes dieser Moleküle die Bewegungsgrösse $m\xi$ hindurch; die gesammte von den soeben betrachteten Molekülen hindurchgetragene Bewegungsgrösse ist also

$$m\xi A d\xi d\eta d\zeta \eta du\, dt,$$

welcher Ausdruck positiv ist, wenn die Bewegung in der Richtung der positiven Y-Axe, negativ hingegen, wenn sie in der Richtung der negativen Y-Axe hindurchgetragen wird.

Durch Integration dieses Ausdruckes bezüglich ξ, η, ζ von $-\infty$ bis $+\infty$ ergibt sich die oben mit $M du\, dt$ bezeichnete Grösse. Es ist also

$$M = m \int_{-\infty}^{+\infty} \int\int \xi \eta A d\xi d\eta d\zeta. \qquad 2)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Betrachten wir zunächst irgend ein Gas, welches sich in Ruhe befindet, d. h. in dem weder sichtbare Massenbewegung noch wahrnehmbare Wärmebewegung stattfindet. Den Werth, welchen die Function f in diesem Falle annimmt, wollen wir mit f_1 bezeichnen, so dass also jetzt

$$A = f_1(\xi, \eta, \zeta)$$

ist. Wenn das Gas sich sonst genau wie im früher betrachteten Falle verhält, nur dass es sich mit einer constanten Geschwindigkeit u in der Richtung der X-Axe fortbewegt, so wird sich offenbar auch die Function, welche die Vertheilung der Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitsrichtungen bestimmt, von von der mit f_1 bezeichneten nur dadurch unterscheiden, dass an die Stelle von ξ der Ausdruck $\xi - u$ tritt. Man wird also haben

$$A = f_1(\xi - u, \eta, \zeta).$$

Natürlich muss auch in diesem letzteren Falle $M = 0$ sein. Die Function f_1 muss also jedenfalls so beschaffen sein, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int \xi\eta f_1(\xi - u, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = 0 \qquad 3)$$

ist. — Sei nun u nicht constant, sondern eine lineare Function von y, so dass etwa $u = ay$ gesetzt werden kann, so hätte man ein Gas, dessen verschiedene Schichten mit verschiedenen Geschwindigkeiten längs einander hingleiten. Die einfachste Annahme wäre in diesem Falle wieder zu setzen

$$A = f_1(\xi - ay, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \qquad 4)$$

wodurch sich ergeben würde

$$M = m \int_{-\infty}^{+\infty}\int\int \xi\eta f_1(\xi - ay, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Bei Ausführung der Integrationen ist y als eine Constante anzusehen, da die Integration nur nach $\xi\eta\zeta$ zu geschehen hat. Es ergibt sich also sofort aus der durch die Gleichung 3) ausgedrückten Eigenschaft der Function f_1, dass die Grösse M auch in dem zuletzt betrachteten Falle den Werth Null besitzt, d. h. es findet keine Mittheilung von Bewegungsgrösse, also auch keine innere Reibung statt. Daraus folgt, dass in dem zuletzt betrach-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

teten Falle die Geschwindigkeitsvertheilung unter den Molekülen nicht durch die einfache Formel 4) gegeben sein kann, sondern es würde diese einfache Geschwindigkeitsvertheilung, wenn sie von Anfang unter den Molekülen bestanden hätte, sofort durch die Vermischung der Moleküle gestört werden, und nur dieser Vermischung ist das Phänomen der inneren Reibung zu danken. Alle Schwierigkeiten bei Berechnung der Geschwindigkeitsvertheilung übertragen sich daher auch auf die Berechnung der inneren Reibung und etwas Ähnliches gilt auch von der Diffusion zweier Gase und der Wärmeleitung.

Maxwell[1] war nun der erste, der trotz dieser Schwierigkeiten die Berechnung der inneren Reibung ermöglichte, indem er bei Berechnung der Moleküle, welche durch ein Flächenelement *du* hindurchgehen, nicht wie wir dies thaten, blos die Moleküle betrachtete welche in einem Cylinder von unendlich kleiner Höhe $r_1 dt$ liegen, sondern indem er jedes hindurchgehende Molekül darauf untersuchte, in welcher Schichte es zum letzten Male mit einem andern zusammengestossen war, (von welcher Schichte es ausgesandt wurde, um mit Clausius zu sprechen) und dann den von jeder Schichte ausgesandten Molekülen in der Richtung der X-Axe die mittlere Geschwindigkeit dieser Schichte zuschrieb.

Schlägt man dieses von Maxwell in die Gastheorie eingeführte Verfahren ein, so erhält man für die Reibungsconstante einen von Null verschiedenen Werth, man mag im Übrigen was immer für eine Voraussetzung über die Geschwindigkeitsvertheilung machen. Nach diesem Verfahren wurde auch von Maxwell[2] und Anderen, namentlich aber von O. E. Meyer[3] die Reibungsconstante berechnet. Nach derselben Methode wurde auch die Wärmeleitungs- und Diffusionsconstante wiederholt berechnet. Es war diese Methode von dem grössten Werthe für die Gastheorie zu einer Zeit, wo es noch keine andere Berechnungsmethode aller dieser Grössen gab, weil man dadurch jedenfalls

---

[1] Phil. Mag. Bd. 19, pag. 37—40.

[2] L. c.

[3] Pogg. A. B. 125, pag. 589—598, dann dessen „Kinetische Theorie der Gase", pag. 317—323.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

wenigstens die Grössenordnung der Reibungs-, Diffusions- und Wärmeleitungsconstante kennen lernte, und man auch voraussetzen konnte, dass der numerische Werth, den man so erhielt, wenigstens nicht allzuweit von dem numerischen Werthe abweichen dürfte, welchen eine exacte Rechnung liefern würde. Allein eine exacte Bestimmung der in Rede stehenden Constanten ist nach dieser Methode nicht möglich. Setzt man, wie dies von den meisten Bearbeitern der Theorie geschehen ist, entweder gleich vom Anfang an voraus, dass die Geschwindigkeiten aller Moloküle unter einander gleich sind oder berechnet man, ohne von vornherein diese Voraussetzung zu machen, dann im Verlaufe des Calcüls den einen oder den andern Werth so, als ob die Geschwindigkeiten aller Moleküle unter einander gleich wären, so liegt es auf der Hand, dass das Resultat nur ein beiläufiges sein kann. Am nächsten wird man jedenfalls der Wahrheit kommen, wenn man, wie dies Herr Meyer in seinem Buche an der zuletzt citirten Stelle thut, voraussetzt, dass in jeder Schichte des Gases die bekannte, von Maxwell gefundene Geschwindigkeitsvertheilung des Gases herrscht, mit welcher sich die sichtbare Bewegung des Gases einfach superponirt. Allein auch nach dieser Methode kann kein exacter Werth für die Reibungsconstante gefunden werden, da die wirklich während des Vorganges der Reibung im Gase herrschende Geschwindigkeitsvertheilung nachweisbar eine andere ist. Ihre Abweichung von der durch jene Superposition modificirten Maxwell'schen ist freilich nur gering, wenn die sichtbare Bewegung des Gases klein ist; allein die durch die Flächeneinheit hindurchgehende Bewegungsgrösse ist dann klein von derselben Ordnung und aus dem Folgenden wird am deutlichsten ersichtlich werden, dass, wenn an die Stelle der thatsächlichen Geschwindigkeitsvertheilung jene modificirte Maxwell'sche gesetzt wird, bei Berechnung der Reibungsconstante Glieder von derselben Ordnung vernachlässigt werden, wie diejenigen sind, welche eben die Reibungsconstante liefern. Ähnliches gilt natürlich auch von der Diffusions- und Wärmeleitungsconstante. Die Folge dieses Mangels an Exactheit der Rechnung macht sich vor Allen bei Berechnung der Wärmeleitungsconstante dadurch geltend, dass für den numerischen Coëfficienten derselben von den verschiedenen Physikern die mannigfaltigsten Werthe gefunden wurden.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Ich stelle hier nur einige derselben zusammen, ohne behaupten zu wollen, dass damit alle für die Wärmeleitungsconstante berechneten Werthe erschöpft wären. Bezeichnen wir mit c die specifische Wärme bei constantem Volumen, mit μ die Reibungsconstante, so findet Maxwell aus seiner älteren Theorie für die Wärmeleitungsconstante den Werth $\frac{3}{2}c\mu$,[1] Clausius findet $\frac{5}{4}c\mu$,[2] Stefan $\frac{25}{12}c\mu$,[3] Maxwell aus seiner neueren Theorie $\frac{5}{3}c\mu$,[4] Lang in seiner ersten Abhandlung $\frac{1}{2}c\mu$,[5] in seiner zweiten $\frac{3}{2}c\mu$,[6] Boltzmann $\frac{5}{2}c\mu$,[7] Rühlmann $\frac{10}{3\pi}c\mu$,[8] O. E. Meyer $\frac{\pi^2}{8}c\mu$[9] und $1{\cdot}53c\mu$.[10]

Im Jahre 1868 lieferte Maxwell den Beweis, dass ein besonders günstiger, die Rechnung sehr vereinfachender Umstand eintritt, wenn man annimmt, dass die Gasmoleküle während des Zusammenstosses nicht wie elastische Kugeln auf einander wirken, sondern dass sie eine Abstossung auf einander ausüben, welche der fünften Potenz der Entfernung ihrer Centra verkehrt proportional ist.

Dieser günstige Umstand bewirkt, dass man die Reibungs-, Diffusions- und Wärmeleitungsconstante exact berechnen kann, ohne das Gesetz der Geschwindigkeitsvertheilung im Gase kennen zu müssen und es wurden diese Constanten von Maxwell in der That unter der Voraussetzung des Wirkungsgesetzes der fünften Potenzen berechnet, ohne dass derselbe die Modification bestimmt hätte, welche das Gesetz der Geschwindigkeitsvertheilung im Falle der inneren Reibung, Diffusion und Wärmeleitung erfährt.

Diese Abhandlung Maxwell's scheint vielfach unrichtig aufgefasst worden zu sein. Man hat dagegen eingewendet, dass nach

---

[1] Phil. Mag. Vol. 20.
Pogg. A. Bd. 100.
[3] Wiener Akad. Sitzungsb. Januar 1863,
[4] Phil. Mag. III. Ser. Vol. 35.
[5] u. [6] Wiener Akad. Sitzungsb. Bd. 64, S. 485, Bd. 65, S. 415.
Wiener Akad. Sitzungsb. Bd. 66, Oct. 1872.
[8] Rühlmann, „Handbuch der mech. Wärmeth." S. 198.
[10] O. E. Meyer, „Kinetische Theorie der Gase." S. 187 u. 188.

©Akademie d Biologiezentrum.at

dem Wirkungsgesetz der fünften Potenzen in jedem Zeitmomente alle Gasmoleküle auf alle anderen wirken würden und dass dies den Grundprincipien der Gastheorie widerspreche.

Das erste ist allerdings richtig, nicht aber das letztere; denn eine Abstossung mit der fünften Potenz der Entfernung nimmt mit wachsender Entfernung so ungemein rasch ab, dass die Wirkung je zweier Moleküle auf einander vollständig vernachlässigt werden kann, wenn deren Entfernung nur einigermassen beträchtlich ist. Das Maxwell'sche Wirkungsgesetz ist so beschaffen, dass eine erhebliche gegenseitige Beeinflussung der Bewegung, d. h. eine bemerkbare Ablenkung von der geradlinigen Bewegung nur dann eintritt, wenn zwei Moleküle sich ganz ungewöhnlich nahe kommen, so dass also jedes Molekül sich während des grössten Theils der Zeit fast vollständig in einer Geraden bewegt, nur wenn es zufällig einem andern Moleküle ungewöhnlich nahe kommt, wird es beträchtlich von der geradlinigen Bahn abgelenkt. Dies entspricht aber vollständig den Anschauungen der modernen Gastheorie von der Natur der Gasmoleküle; denn es ist höchst wahrscheinlich, dass auch die in der Natur vorkommenden Gasmoleküle fortwährend eine gewisse, wenn auch sehr schwache Wirkung auf einander ausüben, so dass sich deren Schwerpunkte niemals in mathematischen Geraden bewegen. Der Zusammenstoss besteht dann darin, dass bei sehr bedeutender Annäherung die Einwirkung plötzlich sehr stark zunimmt, so dass die Abweichung von der geradlinigen Bahn bemerkbar wird.

Man hat ferner gegen die Maxwell'sche Theorie eingewendet, dass dieselbe dem bekannten Joule-Thomson'schen Versuche widerspreche, wonach im Ganzen keine erhebliche Temperaturveränderung eintritt, wenn ein Gas in einen früher vollkommen leeren Raum einströmt. Da hiebei keine andere Veränderung eintritt, als dass die mittleren Abstände der Gasmoleküle wachsen, so kann hiebei von keinen anderen Kräften Arbeit geleistet werden, als von denen, welche die Gasmoleküle in ihren mittleren Abständen aufeinander ausüben. Es beweist also dieser Versuch, dass die Gasmoleküle in ihren mittleren Abständen, keine erheblichen Kräfte auf einander ausüben. Ja die kleine Temperaturveränderung, welche beim Joule-Thomson'schen Versuch auftritt, beweist sogar, dass die Moleküle in ihren mittleren Abständen

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

anziehend auf einander einwirken. Die erstere Thatsache ist in voller Übereinstimmung mit dem Maxwell'schen Wirkungsgesetze. Obwohl man über die mittleren Abstände der Luftmoleküle nichts Sicheres angeben kann, so kann man dieselben doch beiläufig schätzen.

Nimmt man an, dass die Moleküle der tropfbaren Flüssigkeiten sich ungefähr in derselben Distanz befinden, wie die Gasmoleküle im Momente eines Zusammenstosses (in der Maxwell-'schen Theorie tritt an die Stelle eines Zusammenstosses ein so nahes Zusammentreffen, dass die Moleküle erheblich aus den geradlinigen Bahnen abgelenkt werden), nimmt man ferner an, die Dichte der Luft im tropfbaren Zustande wäre 1·5,[1] so wäre die gasförmige Luft etwa tausendmal weniger dicht als die tropfbare; der mittlere Abstand zweier benachbarten Luftmoleküle im gasförmigen Zustande, wäre also etwa zehnmal so gross, als im tropfbaren Zustande, d. h. in der gasförmigen Luft wäre der mittlere Abstand zweier benachbarter Moleküle etwa zehnmal so gross, als der Abstand während eines Zusammenstosses; wenn also die abstossende Kraft der Moleküle der fünften Potenz ihrer Entfernung verkehrt proportional ist, so wäre die Kraft, welche zwei benachbarte Moleküle in ihrem mittleren Abstande aufeinander ausüben, 100000mal so klein, als die durchschnittliche abstossende Kraft, während eines Zusammenstosses, d. h. als diejenige abstossende Kraft, welche zu einer erheblichen Veränderung der geradlinigen Bewegung der Moleküle nothwendig ist. Man begreift daher leicht, dass die Arbeit einer so kleinen Kraft beim Joule-Thomson'schen Versuche sich der Beobachtung entzieht. Natürlich ist der hier berechnete numerische Werth nichts weniger als zuverlässig; es handelt sich aber hier auch gar nicht um eine genaue quantitative Bestimmung des numerischen Werthes, sondern blos um die Grössenordnung der Arbeit, welche das Maxwell'sche Wirkungsgesetz unter den Bedingungen des Joule-Thomson'schen Versuches liefern würde. Auch müsste bei Berechnung der obigen Zahlen ins Auge gefasst werden, dass in verdünnten Gasen die Zusammenstösse seltener werden und daher

[1] Loschmidt, „Zur Grösse der Luftmoleküle", Wr. Akad. Sitzungsberichte, Bd. 52, Oct. 1865.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

die Arbeitsleistung während eines Zusammenstosses sich weniger oft wiederholt, was aber wieder, wie eine ähnliche Rechnung zeigt, wegen der geringen Zeitdauer eines einzelnen Zusammenstosses Verschwindendes liefert.

Wir kommen nun zur zweiten der oben erwähnten Thatsachen, dass nämlich der Joule-Thomson'sche Versuch auf eine kleine Anziehung der Gasmoleküle in ihren mittleren Distanzen hinweist. Diese letztere Thatsache zeigt freilich unwidersprechlich, dass das Maxwell'sche Wirkungsgesetz zwischen zwei Gasmolekülen nicht das absolut richtige sein kann. Allein es ist eine vollkommen falsche Auffassung der neueren Maxwell'schen Theorie, wenn man glaubt, Maxwell habe in derselben ein Naturgesetz aufstellen wollen, welches für die Wirksamkeit der Molekularkräfte ebenso allgemein gilt, wie etwa das Newton'sche Gravitationsgesetz für die Kräfte, die zwischen den Weltkörpern wirksam sind. Dass das thatsächliche Wirkungsgesetz der Molekularkräfte sehr erheblich von dem Maxwell'schen abweichen muss, wird durch viele Thatsachen noch weit evidenter bewiesen, als durch den Joule-Thomson'schen Versuch, so durch die Mehratomigkeit der meisten Gasmoleküle, welche es als sehr unwahrscheinlich erscheinen lässt, dass dieselben wie mathematische Kraftcentra in die Ferne wirken, ferner durch die Cohäsions- und Adhäsionserscheinungen der festen und tropfbaren Körper, welche die Existenz anziehender Molekularkräfte neben den abstossenden fast bis zur Evidenz beweisen, da man doch nicht annehmen kann, dass das Wirkungsgesetz der Molekularkräfte ein ganz anderes in festen und tropfbaren Körpern, als in Gasen ist, endlich durch das Gesetz der Abhängigkeit der Reibungs-, Wärmeleitungs- und Diffusionsconstante von der Temperatur. Allein alle diese Einwände treffen ebenso wie die neuere Maxwell'sche, so auch die alte Gastheorie, welche in den Molekülen feste elastische Kugeln sieht, ja eine Erscheinung, nämlich die Compressibilität der tropfbaren Flüssigkeiten, weist sogar geradezu darauf hin, dass die Wechselwirkung zweier Moleküle, welche mit so bedeutenden Kräften gegen einander gedrückt werden, wie dies beim Zusammenstosse zweier Gasmoleküle der Fall sein muss, mehr Ähnlichkeit mit der aus dem Gesetz der fünften Potenzen als mit der aus dem Gesetz der elastischen Kugeln folgenden haben

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

muss.[1] Was den Joule-Thomson'schen Versuch betrifft, so gilt dasselbe auch von ihm, dass nämlich die molekularen Anziehungskräfte, auf welche er hinweist, ebensowohl mit der Hypothese der elastischen Kugeln, wie mit der neueren Maxwell'schen Theorie in Widerspruch stehen.

Beide Hypothesen müssen also als solche angesehen werden, welche das Verhalten der Gasmoleküle nur so lange angenähert darstellen, als sich dieselben so nahe sind, dass durch ihre Wechselwirkung eine erhebliche Veränderung ihrer geradlinigen Bewegung hervorgerufen wird. Für grössere Abstände, namentlich für die mittleren Abstände der Moleküle in Gasen können beide nicht giltig sein; aber auch für das Verhalten während des Zusammenstosses liefern beide nur ein ungefähres Bild, ohne dass sich, wie mir scheint, gegenwärtig entscheiden liesse, ob die eine oder die andere ein getreueres liefert.

So wenig es aber gegenwärtig Jemandem ernstlich einfallen wird, die Arbeiten, welche unter der Hypothese der elastischen Kugeln gemacht worden sind, für verfehlt zu halten, weil diese Hypothese den Molekülen ein Verhalten zuschreibt, von dem deren wirkliches Verhalten jedenfalls erheblich abweicht, so wenig schiene es mir zweckmässig, die neuere Maxwell'sche Hypothese zu verwerfen, weil auch sie in demselben Falle ist. Wir haben also in der Hypothese der elastischen Kugeln und in der neueren Maxwell'schen Hypothese zwei verschiedene Anschauungen, von denen jede nur ein beiläufiges Bild von dem Verhalten der Gasmoleküle zu geben sucht. Die erstere hat den Vortheil, dass ihre Grundlage anschaulicher und gewissermassen populärer ist; die Grundlage der letzteren ist zwar etwas abstracter, wenn auch durchaus nicht schwer verständlich, da sie ja nur auf den bekannten Gesetzen der Centralbewegung basirt; sie hat aber einen grossen Vorzug, der, wie mit scheint, der neueren Maxwell'schen Hypothese ihre Bedeutung in der Gastheorie für immer sichert. Es lassen sich nämlich unter ihrer Annahme alle Rechnungen mit Leichtigkeit durchführen, deren exacte

---

[1] Vergleiche Boltzmann, „Über das Wirkungsgesetz der Molekularkräfte". Wiener Akad. Sitzungsber. Bd. 66, II. Abth., Juli 1872.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Durchführung unter Annahme der Hypothese der elastischen Kugeln auf fast unüberwindliche Schwierigkeiten stossen würde.

Übrigens ist der physikalische Unterschied beider Hypothesen bei weitem nicht so gross, als man sich denselben gewöhnlich gedacht zu haben scheint. Um diess zu versinnlichen hat Maxwell seiner Abhandlung eine sehr anschauliche Figur beigegeben, in welcher die Bahnen der Centra einer Anzahl von Molekülen gezeichnet sind, die in parallelen Richtungen gegen ein festgehaltenes Molekül anfliegen und von demselben nach seinem Gesetze abgestossen werden.[1] Um diese Bahnen mit den Bahnen zu vergleichen, welche aus dem Gesetze der elastischen Kugeln folgen, kann man folgendermassen verfahren: Man denkt sich in die Maxwell'sche Figur einen Kreis eingezeichnet, dessen Centrum S ist und dessen Radius die von Maxwell punktirte Linie, also die kleinste Distanz ist, bis zu welcher sich die Centra zweier Moleküle nach seinem Gesetze nähern, von denen das eine festgehalten wird, das andere mit der mittleren Geschwindigkeit der Moleküle darauf zufliegt. Wären jetzt die Moleküle elastische Kugeln, deren Durchmesser jene kleinste Distanz ist, und würde man sich wieder eines festgehalten, die andern in parallelen Richtungen darauf zugeschleudert denken (natürlich nicht gleichzeitig, sondern nach einander, damit sie sich nicht untereinander stören), so würde die Maxwell'sche Figur folgende Modification erfahren. Das Centrum des festgehaltenen wäre wieder in S. Die Centra der beweglichen würden aus denselben Richtungen kommen, wie in Maxwell's Figur, aber gleich sehr kleinen elastischen Kugeln von dem eingezeichneten Kreise reflectirt werden.

Man sieht, dass die aus dem Gesetze der elastischen Kugeln sich ergebenden Bahnen zwar quantitativ, aber nicht wesentlich qualitativ von den aus dem neuen Maxwell'schen folgenden abweichen.

Der Hauptunterschied besteht natürlich darin, dass nach dem Maxwell'schen Wirkungsgesetz selbst ziemlich entfernte Molekülbahnen noch eine kleine Einbiegung zeigen; wogegen die anderen Bahnen absolut gerade Linien sind, sobald kein Zusammenstoss mehr stattfindet.

---

[1] Philos. Magazin. 4 ser., vol 35, pag. 145.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Da nach dem Maxwell'schen Wirkungsgesetze die Wechselwirkung der Moleküle nicht bei einer gewissen Entfernung plötzlich vollkommen aufhört, so lassen sich natürlich auch die Begriffe des Zusammenstosses, der Zahl der Zusammenstösse in der Zeiteinheit, der mittleren Weglänge etc. nicht mehr so scharf fassen als bei der Hypothese der elastischen Kugeln. Wenn man aber gerade wollte, so könnte man auch diese Begriffe in die Maxwell'sche Theorie einführen; man brauchte z. B. blos als einen Zusammenstoss den Vorgang zu bezeichnen, wo sich zwei Moleküle so nahe kommen, dass die Richtung ihrer relativen Geschwindigkeit um mehr als einen Grad verändert wird. Man würde dann für die Zahl der Zusammenstösse in der Secunde, für die mittlere Weglänge etc. Grössen von derselben Grössenordnung erhalten, wie unter Voraussetzung der Hypothese der elastischen Kugeln. Den Effect aller Annäherungen der Moleküle, bei denen die Richtung ihrer relativen Geschwindigkeiten um weniger als einen Grad verändert wird, würde man vernachlässigen. Es ist kaum zu befürchten, dass durch diese Vernachlässigung eine grössere Ungenauigkeit entstünde, als dadurch, dass man an Stelle der natürlichen Moleküle elastische Kugeln setzt.

Ja selbst der Begriff der Grösse eines Moleküls ist der Maxwell'schen Theorie nicht vollkommen fremd und über diesen letzten Punkt will ich hier noch einige Bemerkungen machen. Setzt man voraus, dass die Gasmoleküle elastische Kugeln sind, so muss man annehmen, dass das Minimum der Distanz ihrer Centra bei jedem Zusammenstosse dasselbe ist, mag der Zusammenstoss nun central oder schief, mit grösserer oder kleinerer relativer Geschwindigkeit erfolgen. Dieses Minimum ist gleich dem doppelten Radius eines Moleküls, wenn beide zusammenstossenden Moleküle gleichartig sind; dagegen der Summe der Radien beider Moleküle wenn sie verschiedenartig sind. Unter Voraussetzung des Maxwell'schen Wirkungsgesetzes dagegen, ist das Minimum der Distanz zweier aufeinander treffender Moleküle veränderlich. Die Centra der Moleküle kommen sich um so näher, mit je grösserer Geschwindigkeit sich dieselben vor dem Stosse aufeinander zu bewegten; sie kommen sich weniger nahe, wenn der Stoss ein schiefer ist, weil dann die Com-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

ponente der relativen Geschwindigkeit in der Richtung der Entfernung beider Moleküle eine kleinere ist. Allein bei denjenigen Stössen, bei denen die Bahnen der Moleküle sehr bedeutend verändert werden, welche also gerade für die Diffusion, innere Reibung, Wärmeleitung etc. von dem hauptsächlichsten Einflusse sind, ist diese Veränderlichkeit nicht sehr bedeutend; wollte man also in der neueren Maxwell'schen Theorie von der Grösse eines Moleküls sprechen, so müsste man eigentlich untersuchen, welches das Minimum der Distanz zweier Moleküle bei den verschiedenartigen Zusammenstössen ist und den Mittelwerth dieses Minimums mit der Summe der Radien der zusammenstossenden Moleküle identificiren. Es wäre dies insoferne schwierig, als man dabei den verschiedenen Zusammenstössen ein verschiedenes Gewicht zuschreiben müsste, je nachdem durch dieselben die Richtung der zusammenstossenden Moleküle mehr oder weniger verändert wird. Wir wollen uns hier auf so complicirte Betrachtungen nicht einlassen, sondern die Definition möglichst einfach machen. Wir denken uns nämlich das eine der Moleküle festgehalten, das andere aber mit dem mittleren Geschwindigkeitsquadrate aller Moleküle central auf das Festgehaltene zufliegend. Das Minimum der Distanz, bis zu welcher sich das Centrum dieses Moleküls dem des festgehaltenen nähert, also den Radius des Kreises, den wir soeben in die Maxwell'sche Figur eingezeichnet haben, definiren wir dann als doppelten Radius der zusammenstossenden Moleküle, wenn beide gleichartig sind; als Summe der Radien derselben, wenn sie nicht gleichartig sind. Sobald man an dieser Definition festhält, ergibt sich auch aus der Maxwell'schen Theorie eine Beziehung zwischen der Diffusionsconstante zweier Gase und den Reibungsconstanten der einzelnen Gase, sowie auch zwischen der Reibungsconstante eines Gasgemisches und den Reibungsconstanten der Bestandtheile. Ich will hier nur die erstere Beziehung entwickeln.

Maxwell setzt die bewegende Kraft, welche zwischen zwei Molekülen wirkt, gleich $\frac{K}{r^5}$. Wird ein Molekül festgehalten, während sich das andere mit der mittleren lebendigen Kraft l aller Moleküle central darauf zubewegt, so nähern sich beide so lange, bis die ganze lebendige Kraft aufgezehrt ist. Bezeichnen wir

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

also das Minimum der Distanz, welche sie erreichen, mit δ, so ist die Arbeit, welche bei der Annäherung bis zur Distanz δ geleistet wurde

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{K dr}{r^5} = \frac{K}{4\delta^4}$$

und da dieselbe gleich der lebendigen Kraft l sein muss, so erhält man $\delta = \sqrt[4]{\frac{K}{4l}}$. Gehören beide Moleküle der ersten Gasart an, so stellt uns δ die Grösse dar, welche an die Stelle des doppelten Radius der Moleküle der ersten Gasart tritt, und welche wir mit $2\rho_1$ bezeichnen wollen.

Die Grösse K soll in diesem Falle ebenfalls den Index 1 bekommen. Wir haben also

$$2\rho_1 = \sqrt[4]{\frac{K_1}{4l}}.$$

Ebenso erhalten wir

$$2\rho_2 = \sqrt[4]{\frac{K_2}{4l}}.$$

Gehört das eine Molekül der ersten, das andere der zweiten Gasart an, so bedeutet δ diejenige Grösse, welche an die Stelle von $\rho_1 + \rho_2$ tritt. Der Grösse K wollen wir dann, wie es auch Maxwell that, keinen Index beisetzen. Es ist also

$$\rho_1 + \rho_2 = \sqrt[4]{\frac{K}{4l}}.$$

Die mittlere lebendige Kraft l ist für die Moleküle beider Gasarten dieselbe. Dies führt uns sofort auf die Beziehung

$$2\sqrt[4]{K} = \sqrt[4]{K_1} + \sqrt[4]{K_2} \qquad 5)$$

Diese Beziehung zwischen dem Wirkungsgesetz der Moleküle der einen Gasart untereinander, der anderen Gasart untereinander, und eines Moleküls der einen auf ein Molekül der anderen Gasart, ist freilich nicht recht verständlich, wenn man an eine directe Fernwirkung ihrer Centra glaubt; sie wird jedoch sogleich viel verständlicher, sobald man sich mit Stefan[1]) die Abstossung durch Ätherhüllen bewirkt denkt, welche die Centra

[1]) Wiener Akad. Sitzungsber. Bd. LXV, II. Abth., pag. 1. 16.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

der Moleküle umhüllen, und welche nicht absolut starr sind, sondern beim Zusammenstosse entweder verdichtet oder deformirt werden; dann wird es auch begreiflich, dass zwei Moleküle sich mehr einander nähern, wenn sie heftiger aufeinander stossen, oder mit anderen Worten, dass der Radius eines Moleküles kleiner als bei niedriger relativer Geschwindigkeit erscheint. Die Gleichung 5) setzt uns sofort in den Stand, die Beziehung zwischen den Reibungsconstanten beider Gase und ihrer Diffusionsconstante aufzustellen. Bezeichnen wir mit μ_1 und μ_2 die Reibungsconstanten, so haben wir, uns ganz an die Bezeichnungen Maxwell's haltend,

$$\mu_1 = \frac{p_1}{3A_2 k \rho_1} = \frac{p_1}{3A_2 \rho_1 \sqrt{\frac{K_1}{2M_1^3}}},$$

woraus folgt

$$\sqrt{K_1} = \frac{p_1 \sqrt{2M_1^3}}{3A_2 \rho_1 \mu_1} \qquad 6)$$

und ebenso

$$\sqrt{K_2} = \frac{p_2 \sqrt{2M_2^3}}{3A_2 \rho_2 \mu_2}. \qquad 7)$$

Für die Diffusionsconstante im Sinne Loschmidt's[1] und meiner „Weiteren Studien etc."[2] aber findet Maxwell den Werth

$$D = \frac{p_1 p_2}{A_1 \rho_1 \rho_2 (p_1 + p_2) k} = \frac{p_1 p_2}{A_1 \rho_1 \rho_2 (p_1 + p_2) \sqrt{\frac{K}{M_1 M_2 (M_1 + M_2)}}}$$

Man erhält also unter Benützung der Gleichung 5)

$$D = \frac{4 p_1 p_2 \sqrt{M_1 M_2 (M_1 + M_2)}}{A_1 \rho_1 \rho_2 (p_1 + p_2)(\sqrt{K_1} + \sqrt{K_2})^2}.$$

Bezeichnen wir mit M mit dem Index w die Masse eines Moleküls irgend eines Normalgases, z. B. des Wasserstoffes, mit ρ_w die Dichte dieses Normalgases bei irgend einem Druck p_w, so ist bekanntlich unter Voraussetzung gleicher Temperatur der Gase

[1] Wiener Akad. Sitzungsber. Bd. LXI, II. Abth., März 1870.

[2] Wiener Akad. Sitzungsber. Bd. LXVI, II. Abth., October 1872, III. Abschnitt.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\frac{p_w M_w}{\rho_w} = \frac{p_1 M_1}{\rho_1} = \frac{p_2 M_2}{\rho_2}. \qquad 8)$$

Die Gleichungen 6) und 7) gehen also über in

$$\sqrt{K_1} = \frac{\sqrt{2}\, p_w M_w \sqrt{M_1}}{3 A_2 \rho_w \mu_1}$$

$$\sqrt{K_2} = \frac{\sqrt{2}\, p_w M_w \sqrt{M_2}}{3 A_2 \rho_w \mu_2}$$

$$D = \frac{4 p_w^2 M_w^2 \sqrt{\frac{M_1 + M_2}{M_1 M_1}}}{A_1 \rho_w^2 (p_1 + p_2)\left(\sqrt[4]{K_1} + \sqrt[4]{K_2}\right)^2}$$

$$= \frac{6\sqrt{2}\, A_2 p_w M_w}{A_1 \rho_w (p_1 + p_2)} \sqrt{\frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2}} \frac{1}{\left[\sqrt[4]{\frac{M_1}{\mu_1^2}} + \sqrt[4]{\frac{M_2}{\mu_2^2}}\right]^2}.$$

Da diese Formel bezüglich der mit M bezeichneten Grössen von der Dimension Null ist, so braucht man darunter nicht die wirklichen Massen eines Moleküls zu verstehen, sondern man kann dafür die ihnen proportionalen sogenannten Molekulargewichte der Chemie setzen. Es sind also alle in der Formel vorkommenden Grössen unmittelbar experimentell bestimmbar.

Diese Formel stimmt bis auf einen sehr unbedeutenden Unterschied im numerischen Coëfficienten überein mit der von Stefan[1] gefundenen Formel

$$D = \frac{3\pi\sqrt{2}}{8} \sqrt{\frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2}} \frac{v\sqrt{m}}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2}. \qquad 9)$$

Aus der Gleichung Stefan's, welche in der citirten Abhandlung zwei Zeilen vor dessen Gleichung 6, zu finden ist, folgt nämlich

$$v\sqrt{m} = \sqrt{\frac{8 p_0}{\pi N_0}}.$$

Da die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit für alle Gase gleich ist, kann unter N_0 auch die Anzahl der Wasserstoffmoleküle

[1] Über die dynamische Theorie der Diffusion der Gase. Wiener Akad. Sitzungsber. Bd. LXV, II. Abth., April 1872.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

in der Volumeinheit bei derselben Temperatur verstanden werden. p_0 ist dann der Druck, unter dem die betreffende Wasserstoffmasse steht und soll daher an seine Stelle p_w geschrieben werden.

Ferner wollen wir rechts unter dem Wurzelzeichen mit der Masse M_w eines Wasserstoffmoleküls multipliciren und für $N_0 M_w$ wieder ρ_w schreiben. Wir erhalten dann

$$v\sqrt{m} = \sqrt{\frac{8 p_w M_w}{\pi \rho_w}}. \qquad 10)$$

Da diese Formel für jede beliebige Gasart gilt, so erhalten wir, wenn wir mit M_1, v_1, M_2, v_2 Molekülmasse und mittlere Geschwindigkeit unserer beiden Gasarten bezeichnen, die weiteren Formeln

$$v_1 = \sqrt{\frac{8 p_w M_w}{\pi \rho_w M_1}}; \quad v_2 = \sqrt{\frac{8 p_w M_w}{\pi \rho_w M_2}}. \qquad 11)$$

Bei Berechnung der mittleren Weglängen ist vor Allem zu beachten, dass dies nicht etwa die mittleren Weglängen sind, welche den Gasen im diffundirenden Gemische zukommen, sondern diejenigen, welche sie bei ihrem normalen Zustande hätten.

Sollen die Formeln Stefan's nicht blos für eine bestimmte Normaltemperatur und einen bestimmten Normaldruck gelten, so braucht man darunter blos die Temperatur und den Druck zu verstehen, welcher dem gesammten diffundirenden Gasgemische zukommt, also $p_1 + p_2$ statt des Stefan'schen Normaldruckes zu setzen. — Will man also von den von Stefan ganz zum Schlusse seiner Abhandlung entwickelten Formeln Gebrauch machen, so muss man darin unter ρ die unter diesen Umständen geltende Dichte verstehen, so dass wieder, wenn ρ_1 sich auf das erste, ρ_2 auf das zweite Gas bezieht, analog den Formeln 8) zu setzen ist

$$\frac{(p_1+p_2) M_1}{\rho_1} = \frac{(p_1+p_2) M_2}{\rho_2} = \frac{p_w M_w}{\rho_w} \qquad 12)$$

und die von Stefan zum Schlusse seiner Abhandlung entwickelten Formeln liefern mit Berücksichtigung der Formeln 11) und 12).

$$\lambda_1 = \frac{8\mu_1}{\pi \rho v_1} = \frac{8\mu_1}{\pi (p_1+p_2) v_1} \cdot \frac{p_w M_w}{\rho_w M_1} = \frac{\mu_1}{p_1+p_2} \sqrt{\frac{8 p_w M_w}{\pi \rho_w M_1}} \qquad 13)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\lambda_2 = \frac{\mu_2}{p_1 + p_2} \sqrt{\frac{8 p_w M_w}{\pi \rho_w M_2}}. \qquad 14)$$

Die Substitution der Werthe 10), 13) und 14 in die Formel 9) liefert endlich

$$D = \frac{3\sqrt{2}\, p_w M_w}{\rho_w (p_1 + p_2)} \sqrt{\frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2}} \frac{1}{\left(\sqrt[4]{\frac{M_1}{\mu_1^2}} + \sqrt[4]{\frac{M_2}{\mu_2^2}}\right)^2}.$$

Bezeichnet man also den aus der Maxwell'schen Formel folgenden Werth für D mit D_m, den aus der Stefan'schen Formel folgenden mit D_s, so ergibt sich

$$\frac{D_m}{D_s} = \frac{2 A_2}{A_1} = 1{\cdot}029;$$

ein Unterschied, welcher offenbar ganz unbedeutend ist.

Ich hoffe durch diese Betrachtungen genügend nachgewiesen zu haben, dass die neuere Maxwell'sche Theorie neben der Hypothese der elastischen Kugeln ihre Berechtigung und grosse Wichtigkeit für die Gastheorie hat; dass sie aber doch nicht allen Erscheinungen Rechnung tragen kann. Es erscheint mir daher wichtig, auch die alte Hypothese der elastischen Kugeln neben der neueren Maxwell'schen Theorie weiter zu entwickeln; denn nur durch einen möglichst vollkommenen Ausbau beider Theorien kann die Grundlage gelegt werden zu weiteren Forschungen auf diesem Gebiete und ich will im Folgenden einen Beitrag zur Weiterentwicklung der alten Theorie der elastischen Kugeln zu liefern suchen, der übrigens mutatis mutandis auch bei Voraussetzung jedes anderen vom neuen Maxwell'schen verschiedenen Wirkungsgesetzes seine Anwendung finden dürfte.

II. Einführung der die Zusammenstösse characterisirenden Variablen.

Eine Methode zur exacten Bestimmung der Reibungsconstante unter der Hypothese der elastischen Kugeln ohne Berücksichtigung des Gesetzes der Geschwindigkeitsvertheilung ist gegenwärtig nicht bekannt. Wir müssen daher vor Allem zur Bestimmung der Geschwindigkeitsvertheilung übergehen. Die allgemeine

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Gleichung, welche von der die Geschwindigkeitsvertheilung bestimmenden Function erfüllt werden muss, habe ich und zwar meines Wissens zuerst in meiner Abhandlung „Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht und der Gasmoleküle“ [1] aufgestellt und dort als Gleichung 44 bezeichnet, an deren Stelle für ein Gasgemisch die Gleichung 44* tritt. Eine ausführlichere Ableitung dieser Gleichung habe ich in meiner Abhandlung „Über das Wärmegleichgewicht von Gasen, auf welche äussere Kräfte wirken“ [2] geliefert. Von dieser Gleichung wurde ausser von mir nur noch von Maxwell [3] eine Anwendung gemacht und zwar von Letzterem zur Berechnung der Druckkräfte, die in sehr verdünnten Gasen unter dem Einflusse der Wärmeleitung auftreten.

Leider ist die Auflösung dieser Gleichung gerade für das neue Maxwell'sche Wirkungsgesetz eine leichte, in welchem Falle man ihrer zur Berechnung der inneren Reibung, Diffusion und Wärmeleitung nicht bedarf. Für alle anderen Fälle, namentlich für die Hypothese der elastischen Kugeln stösst die Auflösung der Gleichung auf grosse Schwierigkeiten.

Ich habe schon in der ersten der soeben citirten Abhandlungen einen Weg angedeutet, welcher zur Auflösung dieser Gleichung für den letzteren Fall eingeschlagen werden kann und zu einer Reihenentwicklung führt.

Die Reihenentwicklung würde aber, wenn man das dort angedeutete Verfahren einschlagen würde, ohne daran weitere Vereinfachungen anzubringen, eine äusserst weitläufige sein, so dass man an der Durchführbarkeit der Rechnung fast verzweifeln müsste. Es ist mir aber seitdem gelungen, durch einige Kunstgriffe die Gleichung bedeutend zu vereinfachen und ich will in dieser Abhandlung die Methode auseinandersetzen, welche mir gegenwärtig nach vielen vergeblichen Versuchen als die relativ einfachste erscheint.

Die Gleichung 44 der ersten meiner citirten Abhandlung lautet folgendermassen:

---

[1] Wiener Akad. Sitzungsber. Bd. LXVI, II. Abth., Oct. 1872.

[2] Wiener Akad. Sitzungsber. Bd. LXXII, II. Abth., Oct. 1875.

[3] On stresses in rariefied gases arising from inequalities of temperature. Phil. Transact. Part I, 1879.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z} + X\frac{\partial f}{\partial \xi} + Y\frac{\partial f}{\partial \eta} + Z\frac{\partial f}{\partial \zeta} +$$

15.

$$+ \iiint d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1 \int p dp \int d\varphi \cdot r(ff_1 - f'f'_1) = 0.$$

In dieser Gleichung bezeichnen: ξ, η, ζ und ξ_1, η_1, ζ_1 die Geschwindigkeitscomponenten zweier beliebiger zusammenstossender Moleküle,

$$r = \sqrt{(\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2}$$

deren relative Geschwindigkeit (alles vor dem Zusammenstosse), p die kleinste Entfernung, in welche sie gelangen würden, wenn sie, ohne auf einander zu wirken, die geradlinige und gleichförmige Bewegung beibehalten würden, welche sie vor dem Stosse besassen; (ich ziehe es vor r und p statt der von Maxwell angewendeten Buchstaben V und b zu schreiben),

φ den Winkel zwischen der Ebene, welche der X-Axe und der relativen Geschwindigkeit vor dem Stosse parallel ist, und der Bahnebene, d. h. der Ebene, welche die beiden relativen Geschwindigkeiten vor und nach dem Stosse enthält,

x, y, z die Coordinaten irgend einer Stelle im Innern des Gases,

X, Y, Z die Componenten der daselbst herrschenden beschleunigenden Kraft, welche übrigens in unserem Falle den Werth Null hat,

f, welche Grösse behufs Andeutung der Variablen, von denen es abhängt, auch mit $f(\xi\eta\zeta xyzt)$ bezeichnet werden soll, ist die die Geschwindigkeitsvertheilung bestimmende Function, so dass zur Zeit t die Anzahl der Moleküle, für welche die Coordinaten des Centrums zwischen den Grenzen

B x und $x + dx$, y und $y + dy$, z und $z + dz$

die Geschwindigkeitscomponenten aber zwischen den Grenzen

A. ξ und $\xi + d\xi$, η und $\eta + d\eta$, ζ und $\zeta + d\zeta$

liegen, den Werth

$$f(\xi\eta\zeta xyzt)dxdydzd\xi d\eta d\zeta$$

besitzt,

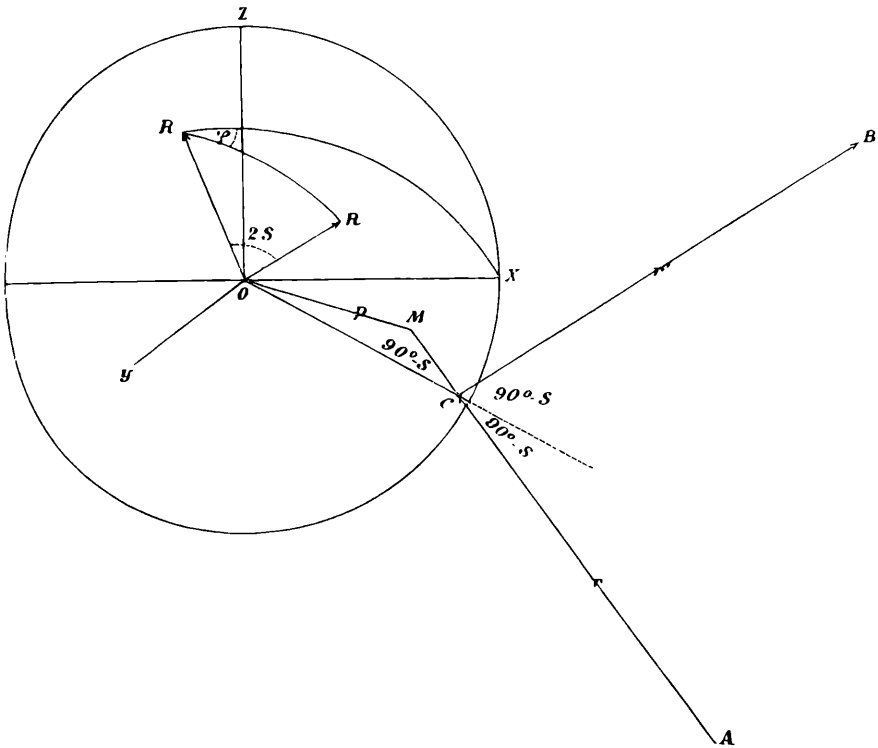
endlich sind f_1, f' und f'_1 die Werthe, welche die Function f annimmt, wenn darin $\xi_1\eta_1\zeta_1$, $\xi'\eta'\zeta'$, respective $\xi_1\eta'_1\zeta'_1$ an Stelle

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

von $\xi\eta\zeta$ substituirt wird, wobei $\xi'\eta'\zeta'$ und $\xi_1\eta_1'\xi_1'$ die Geschwindigkeitscomponenten beider Moleküle nach dem Stosse, also Functionen von $\xi\eta\zeta$, $\xi_1\eta_1\zeta_1$ p und φ sind.

Die Grössen $\xi\eta\zeta$ und $\xi_1\eta_1\xi_1$ bedürfen keiner weiteren Veranschaulichung und ich will hier nur bemerken, dass ich das Molekül mit den ersteren Geschwindigkeitscomponenten immer als das erste, das andere immer als das zweite der zusammenstossenden Moleküle bezeichnen will. Die Bedeutung der Grössen p und φ für den Fall des Zusammenstosses elastischer Kugeln können wir uns am leichtesten durch die Fig. 1 veranschaulichen.

Fig. 1.



In dieser Figur bedeutet 0 den Ort des Mittelpunktes des ersten Moleküls; der Kreis entspricht der Oberfläche einer Kugel, deren Radius gleich dem Durchmesser δ eines Moleküls ist und welche sich so bewegt, dass ihr Centrum immer mit dem Centrum des ersten Moleküls zusammenfällt, also vor dem Stosse mit der Geschwindigkeit des ersten Moleküls vor dem Stosse, nach dem-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

selben mit der Geschwindigkeit des ersten Moleküls nach dem Stosse. Ich will dieser Kugel den Namen der gezeichneten Kugel beilegen.

$0X$, $0Y$, $0Z$ sind drei Coordinatenaxen welche den fixen Coordinatenaxen parallel sind und immer durch das Centrum der gezeichneten Kugel, also auch durch das Centrum des ersten Moleküls gehen.

Wenn zwei materielle Punkte irgend eine gegenseitige Centralbewegung machen, so kann man immer von einem beweglichen Coordinatensysteme Gebrauch machen, dessen Axen sich parallel bleiben und fortwährend durch den einen materiellen Punkt gehen. Die Bewegung des anderen relativ gegen dieses Coordinatensystem ist dann immer geometrisch ähnlich der Bewegung jedes der materiellen Punkte relativ gegen den gemeinsamen Schwerpunkt, welcher Satz bekanntlich bei Berechnung der Bewegung eines Planeten relativ gegen das Sonnencentrum benutzt wird. Da der elastische Stoss ein Specialfall der Centralbewegung ist, so bewegt sich das Centrum des zweiten Moleküls relativ gegen die oben eingeführten Coordinatenaxen $0X$, $0Y$, $0Z$ gerade so, als ob es eine unendlich kleine elastische Kugel wäre, welche an der als fix gedachten, gezeichneten Kugel reflectirt wird. C sei der Punkt, wo es auf die gezeichnete Kugel auftrifft. $AC = r$ sei die relative Geschwindigkeit der zweiten Kugel gegen die erste vor dem Stosse (die Geschwindigkeit, welche die zweite Kugel erhält, wenn man zu ihrer wirklichen Geschwindigkeit noch die der ersteren Kugel entgegengesetzte superponirt). $CB = r'$ stelle in Grösse und Richtung die relative Geschwindigkeit nach dem Stosse dar, welche nach dem Gesetze des elastischen Stosses ebenso gross ist, wie r und mit der Geraden $0C$ denselben Winkel bildet, wie r, da ja $0C$ die Centrallinie der beiden zusammenstossenden Kugeln im Momente des Zusammenstosses ist. Wir ziehen durch 0 zwei Gerade parallel mit r und r', deren Durchschnittspunkte mit der gezeichneten Kugel wir mit R und R' bezeichnen; der Winkel dieser beiden Geraden ist dann derjenige, um welchen die relative Geschwindigkeit durch den Zusammenstoss gedreht wurde und welchen Maxwell mit 2Θ bezeichnet, wofür wir aber lieber $2S$ schreiben wollen. Der Winkel der Ebenen ROR' und ROX ist der von Maxwell mit φ bezeichnete

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Winkel. Die Grösse p endlich finden wir, wenn wir die Linie r verlängern und vom Punkte 0 darauf eine Senkrechte OM fällen; die Länge dieser Senkrechten ist gleich p und es ergibt sich sofort aus der Fig. 1

$$p = OC \cos S = \delta \cos S. \qquad 16)$$

Ebenso sieht man, dass p alle Werthe von Null bis δ, S alle Werthe von Null bis $\frac{\pi}{2}$, φ alle von Null bis 2π durchlaufen kann.

Betrachtungen, welche den Maxwell'chen ähnlich sind, wurden zuerst von Stefan[1] auf die Bewegung von elastischen Kugeln angewendet und ausser zur Berechnung der Diffusion und inneren Reibung, welche jedoch wegen der Unbekanntschaft mit dem Geschwindigkeitsvertheilungsgesetz natürlich ebenfalls nicht vollkommen exact ist, zu einem äusserst einfachen und vollkommen exacten Beweise des Avogardro'schen Satzes benützt. Später hat Maxwell, pag. 240, Gleichung 17 der eben citirten Abhandlung aus den Londoner Transactions gezeigt, welchen Werth die von ihm mit b bezeichnete Grösse im Falle der Voraussetzung elastischer Kugeln annimmt.

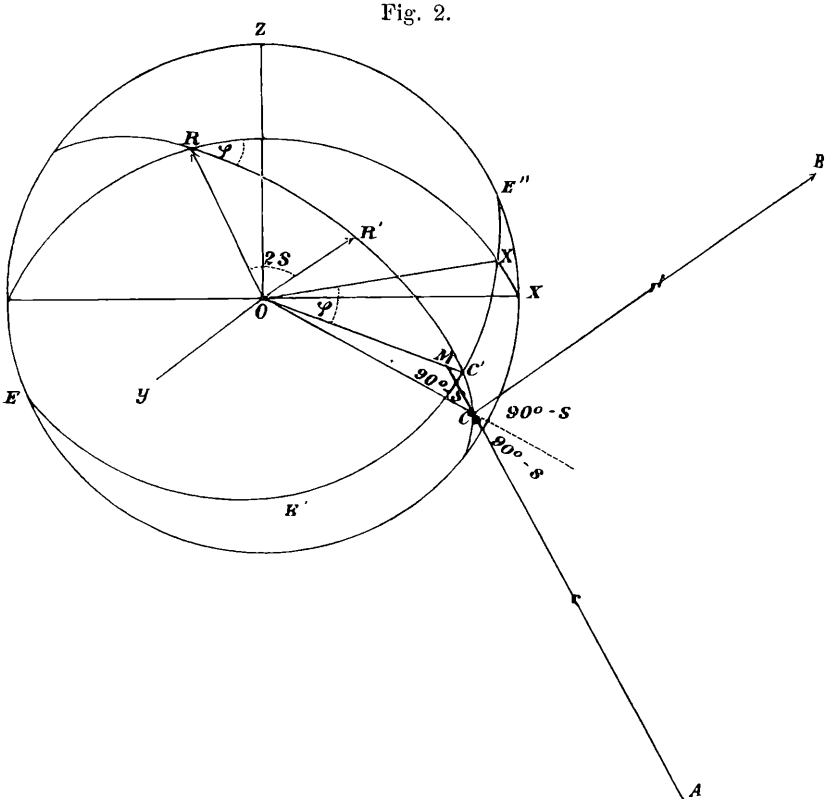
Da sich die von Stefan angewendete Construction etwas von der Maxwell'schen unterscheidet, so glaube ich, dass es die Übersicht fördern wird, wenn wir die Stefan'sche Construction ebenfalls einer näheren Betrachtung unterziehen. Dieselbe ist in Fig. 2 dargestellt. Daselbst haben gleiche Buchstaben dieselbe Bedeutung, wie in Fig. 1, was auch von allen folgenden Figuren gilt. Stefan legt zuerst durch 0 eine Ebene $EE'E''$, welche senkrecht auf $0R$, also auf der relativen Geschwindigkeit der Moleküle vor dem Stosse steht und welche von der Ebene ROX in der Geraden OX', von der Bahnebene $RR'C$ in der Geraden OC' geschnitten wird (unter der Bahnebene verstehen wir hier wieder die Ebene, welche die beiden relativen Geschwindigkeiten vor und nach dem Stosse, also auch die Centrallinie enthält. Mit λ bezeichnet Stefan den Winkel MCO zwischen der Centrallinie und der relativen Geschwindigkeit vor dem Stosse, also den Winkel

[1] Über die dynamischen Theorie der Diffusion der Gase. Wiener Akad. Sitzungsber. Bd. LXV, II. Abth., April 1872.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

90—S, mit φ den Winkel $X'OC'$, also denselben Winkel, den auch Maxwell mit φ bezeichnet.

Fig. 2.

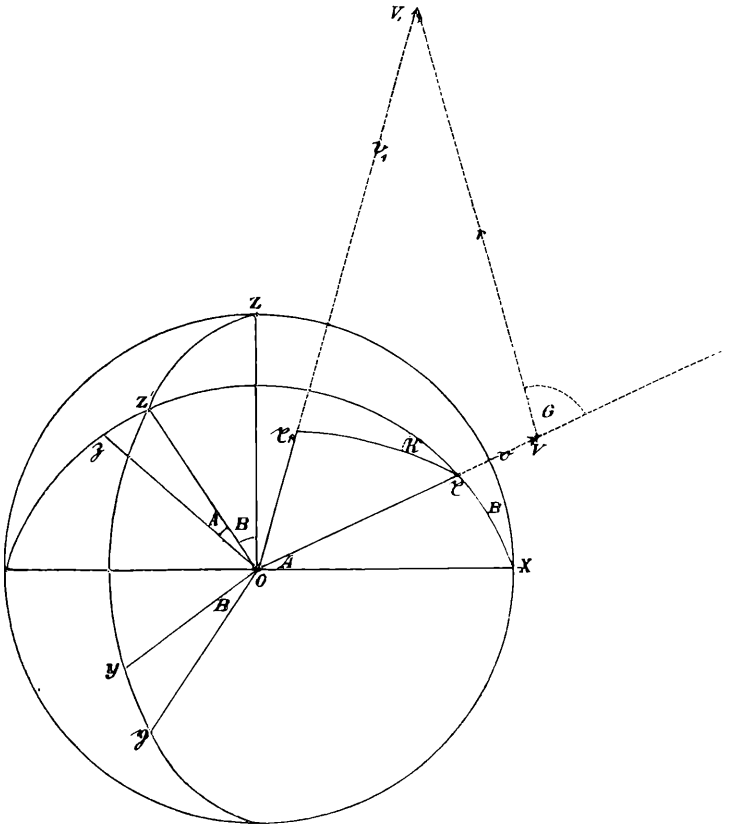


Es wird sich jedoch später zeigen, dass es sehr zur Vereinfachung der Rechnung beiträgt, wenn man statt dieses Winkels φ den Winkel O zwischen der Bahnebene und einer Ebene, welche den Richtungen der beiden Geschwindigkeiten der Moleküle vor dem Stosse parallel ist, einführt. Ich will im Folgenden unter Gestalt des Zusammenstosses die Grösse der Geschwindigkeiten, sowie die relative Lage ihrer Richtungen vor dem Stosse und der Richtung der Centrallinie verstehen, gewissermassen die Gestalt der Figur, welche von diesen Linien gebildet wird; unter Lage des Zusammenstosses dagegen, will ich die Lage dieser Linien gegen die Coordinatenaxen verstehen.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Es ist nun klar, dass der Winkel φ sowohl von der Gestalt als auch von der Lage, der Winkel O hingegen nur von der Gestalt des Zusammenstosses abhängt und dies ist der Vortheil, den der letztere Winkel gegenüber dem ersteren bietet. Ausserdem wollen wir die Richtungen der Geschwindigkeit des ersten Moleküls vor und der relativen Geschwindigkeit vor dem Stosse durch je zwei Winkel characterisiren, wie sie beim Gebrauch räumlicher Polarcoordinaten verwendet werden. Wir können uns diese Winkel durch die Fig. 3 versinnlichen. In derselben sind

Fig. 3.



OV und OV_1 vom Coordinatenanfangspunkte aus gezogene Linien, welche gleich lang und gleich gerichtet sind, wie die Geschwindigkeiten der beiden Moleküle vor dem Stosse. VV_1 gibt also in

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

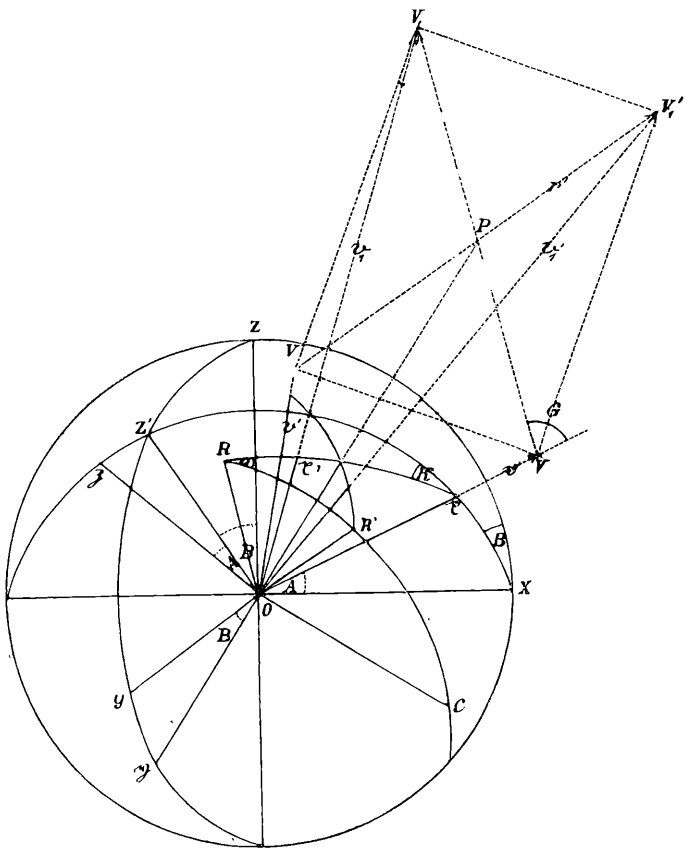
Grösse und Richtung die relative Geschwindigkeit der Moleküle vor dem Zusammenstosse und zwar im Sinne des Pfeiles, wenn man das erste Molekül als ruhend denkt. Der Kreis der Fig. 3 versinnlicht eine Kugel von beliebigem Radius, welche wir wieder die gezeichnete Kugel nennen wollen. Am einfachsten wird es sein, ihr denselben Radius wie in den früheren Figuren zuzuschreiben. Die Durchschnittspunkte der verschiedenen Geraden mit der gezeichneten Kugel wollen wir dadurch ersichtlich machen, dass wir bei allen Geraden denjenigen Theil, welcher im Innern der Kugel liegt, ausziehen, denjenigen aber, welcher aus der Kugel herausragt, punktiren. Die Durchschnittspunkte der Coordinatenaxen mit der gezeichneten Kugel bezeichnen wir speciell mit XYZ, die Durchschnittspunkte der Geraden OV und OV_1 mit der gezeichneten Kugel bezeichnen wir mit $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$. Z' endlich ist ein später näher zu bezeichnender Punkt auf dem grössten Kreise $X\mathfrak{x}$. Wir bezeichnen nun den Winkel zwischen der positiven X-Axe und der positiven Richtung von v mit A, den Winkel zwischen den positiven Richtungen von v und r mit G, den Winkel der Ebenen VOX und ZOX, also der grössten Kreise $\mathfrak{x}X$ und ZX mit B, den der Ebenen V_1OV und $Z'O\mathfrak{x}$, also der grössten Kreise $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}$ und $Z'\mathfrak{x}$ mit K. Bei dieser Figur ist es vollständig gleichgiltig, ob man sich den Coordinatenanfangspunkt ruhend oder vor und nach dem Stosse mit der Geschwindigkeit des ersten Moleküls fortschreitend denkt, nur muss man sich im letzten Falle alle Linien mit derselben Geschwindigkeit parallel zu sich selbst mitbewegt denken. Daher ist es wohl am einfachsten, wenn wir uns in dieser Figur den Coordinatenanfangspunkt ruhend denken und alle Linien von dem ruhenden Coordinatenanfangspunkte aus in der beschriebenen Grösse und Richtung auftragen.

Dasselbe gilt von der Fig. 4, in welcher wir zur grösseren Übersicht dieselbe Kugel, wie in Fig. 3 zeichnen und von deren Mittelpunkte aus alle in unseren Constructionen vorkommenden Geraden vereinigt auftragen wollen. Sowohl die Endpunkte dieser Geraden, als auch ihre Durchschnittspunkte mit der Kugel bezeichnen wir mit denselben Buchstaben, wie in den übrigen Figuren. So sollen die Punkte, in welchen die Kugel der Reihe nach von den der x-Axe, der Geschwindigkeit des ersten Moleküls vor dem Stosse, der relativen Geschwindigkeit der Moleküle vor und

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

nach dem Stosse parallelen Geraden, getroffen wird mit $X, \mathfrak{x}, R, R'$ bezeichnet werden. Ziehen wir auf der Kugel die grössten Kreis-

Fig. 4.



bogen $R\mathfrak{x}$ und RR', so ist ihr Winkel O derjenige, den wir an Stelle des Maxwell'schen φ einführen wollen. Ziehen wir auch noch den in der Figur nicht gezeichneten grössten Kreisbogen RX, so ist φ der Winkel zwischen RX und RR' und es ist, wenn der Winkel zwischen RX und $R\mathfrak{x}$ mit λ bezeichnet wird

$$0 = \varphi + \lambda. \qquad 17)$$

Der Punkt C in Fig. 5 ist natürlich auch nicht mehr der Punkt, wo sich das Centrum des zweiten Moleküls im Momente des Zusammenstosses wirklich befindet, sondern es ist der Durch-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

schnittspunkt der Kugel mit einer Geraden, welche vom Coordinatenursprunge aus parallel der Centrallinie der Moleküle im Momente des Zusammenstosses gezogen wird.

III. Vereinfachung der Gleichung 15).

Wir wollen jetzt zur Substitution aller dieser Werthe in die Fundamentalgleichung 15) schreiten und zwar wollen wir der daselbst vorkommenden Function f aus leicht einzusehenden Gründen folgende Form ertheilen:

$$f(\xi,\eta,\zeta,x,y,z,t) = C[1+2hqy\xi+\xi\eta\varphi(v^2)]e.^{-hv^2} \qquad 18)$$

In diesem Ausdrucke sind C,h,q Constanten, v ist $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$, φ eine noch zu bestimmende Function von v^2. Es ist dann die Function f von der Zeit unabhängig. Wir haben es also mit einem sogenannten stationären Zustande zu thun. Die mit der xz-Ebene zusammenfallende Gasschicht hat keine sichtbare Bewegung (Molarbewegung). Diejenige der xz-Ebene parallele Gasschicht, deren Abstand von dieser Coordinatenebene y ist, hat parallel zur x-Axe die constante Molargeschwindigkeit qy. Wenn man irgendwo parallel zur xz-Ebene ein ebenes Flächenstück vom Flächeninhalte Eins construirt und die in der Zeiteinheit durch dieses Flächenstück mehr in der Richtung der positiven als der negativen y-Axe hindurchgehende parallel der x-Axe geschätzte Bewegungsgrösse mit M bezeichnet, so erhält man die Formel:

$$M = m\int_{-\infty}^{+\infty}\iint \xi\eta f d\xi d\eta d\zeta. \qquad 19)$$

Für den Reibungscoëfficienten aber ergibt sich der Werth

$$\mu = -\frac{M}{q} \qquad 20)$$

Ferner erhalten wir, wenn wir die Bedeutung der von uns eingeführten Winkel ins Auge fassen

$$d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1 = r^2\gamma dr dG dK \qquad 21)$$

$$p = \delta s \qquad 22)$$

$$\xi = va;\ \eta = v\alpha\beta;\ \zeta = v\alpha b. \qquad 23)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Wir haben die Winkel immer mit grossen lateinischen Buchstaben bezeichnet, die entsprechenden kleinen lateinischen Buchstaben sollen immer den Cosinus, die griechichen den Sinus des Winkels bedeuten, so dass $g = \cos G$, $\gamma = \sin G$, etc. ist. Wir erhalten ferner aus dem Dreiecke VOV_1 der Fig. 3 die Beziehung

$$v_1^2 = v^2 + r^2 + 2vrg. \qquad 24)$$

Endlich ist bei der Integration nach φ offenbar sowohl ξ, η, ζ als auch ξ_1, η_1, ζ_1, daher auch die Richtungen von Ox, OR und OX und endlich auch der Winkel $XRx = \lambda$ als constant zu betrachten. Es folgt daher aus der Gleichung 17)

$$d\varphi = d0. \qquad 25)$$

Man sieht übrigens, dass man direct genau dieselben Betrachtungen, welche ich bei Ableitung der Gleichung 15) auf den Winkel φ angewendet habe, auch auf den Winkel O hätte anwenden und dadurch in die Gleichung 15) unmittelbar dO an Stelle von $d\varphi$ erhalten können. Die Differenziation des Ausdruckes 18) liefert ferner

$$\eta \frac{df}{dy} = 2hCq\xi\eta e^{-hv^2} = 2hCqv^2\alpha\beta e^{-hv^2}. \qquad 26)$$

Alle übrigen Glieder der Gleichung 15) verschwinden mit Ausnahme des mehrfachen Integrals. Um Letzteres zu berechnen, setzen wir zunächst voraus, dass die Geschwindigkeit der Molarbewegung des Gases gegen die mittlere Geschwindigkeit der Molecularbewegung verschwindet, oder mit anderen Worten, dass in dem Ausdrucke 18) die Grössen $2hqy\xi$ und $\xi\eta\varphi(v^2)$ gegenüber der Einheit verschwinden. Man könnte glauben, dass wir dadurch ebenfalls auf die Exactheit der Rechnung verzichten. Allein wir vernachlässigen hier nicht Grössen, welche von derselben Grössenordnung sind, wie das Resultat, sondern solche, welche sicher umsomehr gegen die auf das Resultat Einfluss nehmenden verschwinden, je kleiner die Molarbewegung des Gases gegen die Molekularbewegung ist. Ihre Vernachlässigung ist also theoretisch gerechtfertigt; sie ist es auch praktisch, da ja bei allen Experimenten, aus denen bisher die Reibungsconstante von Gasen bestimmt wurde, sicher das Verhältniss der Geschwindigkeit der Molarbewegung zur mittleren Geschwindigkeit der Molekular-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

wegung ein ganz ausserordentlich kleines ist. Durch diese Vernachlässigung erhalten wir zunächst, wenn wir auch noch die Gleichungen

$$v^2 + v_1'^2 = v^2 + v_1^2 \text{ und} \qquad 27)$$
$$\xi' + \xi_1' = \xi + \xi_1,$$

welche aus den Principien der Erhaltung der lebendigen Kraft und der Bewegung des Schwerpunktes folgen, berücksichtigen:

$$f' f_1' - f f_1 = \qquad 28)$$
$$C^2 e^{-h(v^2+v_1^2)}[\xi'\eta'\varphi(v'^2) + \xi_1'\eta_1'\varphi(v_1'^2) - \xi\eta\varphi(v^2) - \xi_1\eta_1\varphi(v_1^2)].$$

Die Gleichung 15) geht also, nachdem sie durch den Ausdruck $Cv^2 a\alpha\beta e^{-hv^2}$ dividirt worden ist und nachdem der für die Integrationen als constant zu betrachtende Factor $\frac{1}{a\alpha\beta}$ unter die Integralzeichen gesetzt worden ist, über in folgende:

$$2hq = \frac{C\delta^2}{v^2}\int_0^\infty r^3 dr \int_0^\pi \gamma dG e^{-h(v^2+r^2+2vr\gamma)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} s\sigma dS \int_0^{2\pi} dO \times$$

$$\left[\varphi(v'^2)\int_0^{2\pi}\frac{\xi'\eta' dK}{a\alpha\beta} + \varphi(v_1'^2)\int_0^{2\pi}\frac{\xi_1'\eta_1' dK}{a\alpha\beta} - \varphi(v^2)\int_0^{2\pi}\frac{\xi\eta dK}{a\alpha\beta} - \varphi(v_1^2)\int_0^{2\pi}\frac{\xi_1\eta_1 dK}{a\alpha\beta}\right]. \qquad 29)$$

Hierbei wurde berücksichtigt, dass v' und v_1' für die Integration nach K als Constante zu betrachten sind, dass sie also die Variable K nicht enthalten, was in der That aus den später zu entwickelnden Ausdrücken unmittelbar hervorgeht. Es folgt dies übrigens schon auch aus dem Umstande, dass die Werthe der Variabeln v' und v_1' offenbar nur von dem abhängen, was wir die Gestalt eines Zusammenstosses genannt haben und daher den Winkel K, welcher blos die Lage des Zusammenstosses gegen die Coordinatenaxen bestimmt, nicht enthalten können.

Wir haben hier nur noch die Grössen ξ_1, η_1, ζ_1, ξ', η', ζ', ξ_1', η_1', ζ_1', v' und v_1' als Functionen der Integrationsvariabeln auszudrücken. Es geschieht dies am einfachsten durch eine Coordinatentransformation.

Wir denken uns das in Fig. 3 verwendete Coordinatensystem zuerst um die x-Axe um den Winkel B gedreht, also so lange, bis die xz-Ebene die Richtung OV enthält, dabei soll auf dem grössten Kreise ZY der Durchschnittspunkt Z der z-Axe mit der

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Kugel nach Z', der Durchschnittspunkt Y der y-Axe mit der Kugel nach $\mathfrak{y}$ wandern. Hernach drehen wir das Coordinatensystem nochmals um die Gerade $O\mathfrak{y}$ um den Winkel A, bis die x-Axe mit der Richtung OV zusammenfällt, dadurch soll die Gerade OZ' in die Lage $O\mathfrak{z}$ kommen. Die Richtungen $O\mathfrak{x}$, $O\mathfrak{y}$, $O\mathfrak{z}$, welche die Coordinatenaxen durch beide Drehungen angenommen haben, bezeichnen wir als die neuen Coordinatenaxen. Es werden dann die Cosinusse der Winkel zwischen den alten und neuen Coordinatenaxen durch folgendes Schema ausgedrückt:

	X	Y	Z
$\mathfrak{x}$	a	$\alpha\beta$	αb
$\mathfrak{y}$	o	b	$-\beta$
$\mathfrak{z}$	$-\alpha$	$a\beta$	ab

30)

Dabei dient das sphärische Dreieck, dessen Ecken $\mathfrak{x}\ Z'\ Y$ sind, zur Bestimmung von $\cos(\mathfrak{x}, Y)$, das sphärische Dreieck $\mathfrak{z}Z'\ Y$ zur Bestimmung von $\cos(\mathfrak{z}, Y)$, das Dreieck $\mathfrak{x}Z'Z$ für $\cos(\mathfrak{x}, Z)$ endlich das Dreieck $\mathfrak{z}Z'Z$ für $\cos(\mathfrak{z}, Z)$.

Es sind ferner ξ, η, ζ die Projection von v, ebenso ξ_1, η_1, ζ_1 die Projectionen von v_1 auf die alten Coordinatenaxen. Bezeichnen wir mit x, y, z, $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, x', y', z', $\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}'$ die Projectionen der beiden Relativgeschwindigkeiten r und r' vor und nach dem Stosse auf die alten und neuen Coordinatenaxen, so ist zunächst:

$$x = \xi_1 - \xi, \quad y = \eta_1 - \eta, \quad z = \zeta_1 - \zeta \tag{31}$$

$$x' = \xi_1' - \xi', \quad y' = \eta_1' - \eta', \quad z' = \zeta_1' - \zeta'. \tag{32}$$

Ferner hat man nach den bekannten Formeln für Polarcoordinaten

$$\xi = va, \quad \eta = v\alpha\beta, \quad \zeta = vab \tag{33}$$

$$\mathfrak{x} = rg, \quad \mathfrak{y} = r\gamma\varkappa, \quad \mathfrak{z} = r\gamma k \tag{34}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \mathfrak{x}\cos(\mathfrak{x}, x) + \mathfrak{y}\cos(\mathfrak{y}, x) + \mathfrak{z}\cos(\mathfrak{z}, x) = rag - r\alpha\gamma k \\ y &= r\alpha\beta g + rb\gamma\varkappa + ra\beta\gamma k \\ z &= rabg - r\beta\gamma\varkappa + rab\gamma k \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

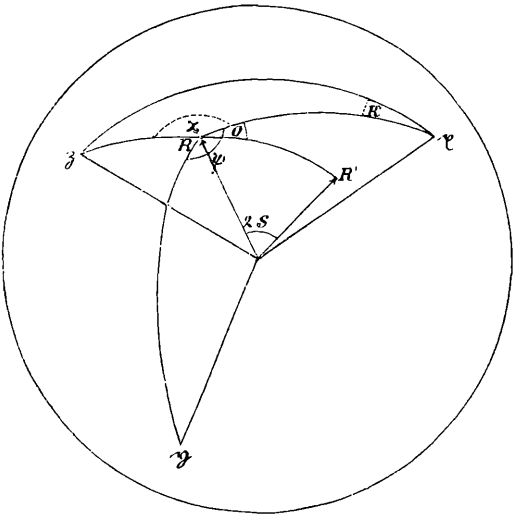
woraus sofort mittelst der Gleichungen 31) und 33) folgt

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= va + rag - r\alpha\gamma k \\ \eta_1 &= v\alpha\beta + r\alpha\beta g + rb\gamma\varkappa + ra\beta\gamma k \\ \zeta_1 &= vab + rabg - r\beta\gamma\varkappa + rab\gamma k \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Um die Projectionen $\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}'$, der relativen Geschwindigkeit r' nach dem Stosse auf die neuen Coordinatenaxen zu finden, wollen wir noch eine Figur betrachten (Fig. 5). Die Kugel dieser

Fig.



Figur ist dieselbe, welche auch in den beiden vorhergehenden Figuren angewendet wurde. R und R' sind ihre Durchschnittspunkte mit den beiden relativen Geschwindigkeiten, welche mit einander den Winkel $2S$, und deren Ebene mit der Ebene $\mathfrak{x}OR$ den Winkel O einschliesst. Wir bezeichnen die sphärischen Winkel $\mathfrak{z}R\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}R\mathfrak{x}$ mit χ und ψ und erhalten aus dem sphärischen $\mathfrak{x}RR'$ (dessen eine Seite übrigens in Fig. 5) nicht gezeichnet ist.

$$\cos(r'\mathfrak{x}) = \cos(R\mathfrak{x})\cos(RR') + \sin(R\mathfrak{x})\sin(RR')\cos O,$$

daher wegen $r = r'$,

$$\mathfrak{x}' = r'\cos(r'\mathfrak{x}) = r(gs_2 + \gamma\sigma_2 o), \qquad 37)$$

wobei s_2 und σ_2 für $\cos 2S$ und $\sin 2S$ geschrieben wurde. Ähnlich erhält man durch Betrachtung der beiden sphärischen Dreiecke $\mathfrak{y}RR'$ und $\mathfrak{z}RR'$

$$\cos(r'\mathfrak{y}) = \cos(R,\mathfrak{y})\cos(R,R') + \sin(R,\mathfrak{y})\sin(R,R')\cos(\psi - 0)$$
$$\cos(r'\mathfrak{z}) = \cos(R,\mathfrak{z})\cos(R,R') + \sin(R,\mathfrak{z})\sin(RR')\cos(\chi + 0).$$

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Nun liefert das sphärische Dreieck $R\mathfrak{y}\mathfrak{z}$

$$\sin(R\mathfrak{z}) \cdot \sin\chi = \sin(\mathfrak{x},\mathfrak{z}) \sin K = \varkappa$$
$$\cos(\mathfrak{x}\mathfrak{z}) = \cos(\mathfrak{x}R)\cos(\mathfrak{z}R) + \sin(\mathfrak{x}R)\sin(\mathfrak{z}R)\cos\chi,$$

woraus folgt

$$\sin(\mathfrak{z}R)\cos\chi = -gk$$

und ebenso liefert das sphärische Dreieck $R\mathfrak{x}\mathfrak{y}$

$$\sin(R\mathfrak{y})\sin\psi = \sin(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\cos K = k$$
$$\sin(R\mathfrak{y})\cos\psi = -g\varkappa,$$

woraus sich ergibt

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{y}' &= r'\cos(r'\mathfrak{y}) = r(\gamma\varkappa s_2 - g\varkappa\sigma_2 o + k\sigma_2\omega)\\ \mathfrak{z}' &= r'\cos(r'\mathfrak{z}) = r(\gamma k s_2 - gk\sigma_2 o - \varkappa\sigma_2\omega).\end{aligned}\right\} \quad 38)$$

Hieraus findet man nun durch Coordinatentransformation

$$x' = \mathfrak{x}'\cos(\mathfrak{x},X) + \mathfrak{y}'\cos(\mathfrak{y}X) + \mathfrak{z}'\cos(\mathfrak{z}L) = a\mathfrak{x}' - \alpha\mathfrak{z}'$$
$$y' = \alpha\beta\mathfrak{x}' + b\mathfrak{y}' + a\beta\mathfrak{z}', z' = ab\mathfrak{x}' - \beta\mathfrak{y}' + ab\mathfrak{z}'$$

und hieraus durch Substitution der obigen Werthe

$$\left.\begin{aligned}x' &= r(ags_2 - \alpha\gamma k s_2 + a\gamma\sigma_2 o + \alpha gk\sigma_2 o + \alpha\varkappa\sigma_2\omega)\\ y' &= r(\alpha\beta g s_2 + b\gamma\varkappa s_2 + a\beta\gamma k s_2 + \alpha\beta\gamma\sigma_2 o - bg\varkappa\sigma_2 o - a\beta gk\sigma_2 o + bk\sigma_2\omega\\ &\qquad - a\beta\varkappa\sigma_2\omega)\\ z' &= r(\alpha bg s_2 - \beta\gamma\varkappa s_2 + ab\gamma k s_2 + \alpha b\gamma\sigma_2 o + \beta g\varkappa\sigma_2 o - abgk\sigma_2 o - \beta k\sigma_2\omega\\ &\qquad - ab\varkappa\sigma_2\omega).\end{aligned}\right\} \quad 39)$$

Wir haben nun wegen der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes

$$\xi' + \xi'_1 = \xi + \xi_1,\ \eta' + \eta'_1 = \eta + \eta_1,\ \zeta' + \zeta'_1 = \zeta + \zeta_1. \quad 40)$$

Aus diesen und den Gleichungen 31) und 32) folgt

$$\xi' = \xi + \frac{x - x'}{2}, \quad = \eta + \frac{y - y'}{2}, \quad \zeta' = \zeta + \frac{z - z'}{2} \quad 41)$$

$$\xi'_1 = \xi + \frac{x + x'}{2},\ \eta'_1 = \eta + \frac{y + y}{2},\ \zeta'_1 = \zeta + \frac{z + z'}{2} \quad 42)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Es ist wichtig zu bemerken, dass man $\xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1$ aus $\xi' \quad \zeta'$ erhält, indem man die Zeichen von $x'\ y'\ z'$ umkehrt, also, wenn man sich für $\xi, \eta, \zeta, x, y, z, x'\ y', z'$ die Werthe 33), 35) und 39) substituirt denkt, indem man $90° + S$ statt S substituirt. Hat man daher $\xi'\ \eta'\ \zeta'$ durch die Variabeln v, r, A, B, G, K, S, O ausgedrückt, so erhält man $\xi'_1 \eta'_1 \xi'_1$ als Functionen derselben Variabeln, indem man $90° + S$ statt S oder $-\sigma$ statt s und s statt σ substituirt.

Wir wollen zuvörderst den Ausdruck v'^2 bilden. Wir haben wegen $r^2 = r'^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$

$$v'^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = v^2 + \frac{r^2}{2} +$$

$$\xi x + \eta y + \zeta z - \xi x' - \eta y' - \zeta z' - \frac{xx' + yy' + zz'}{2};$$

ferner

$$\xi x + \eta y + \zeta z = vr\cos(v,r) = vrg$$

$$\xi x' + \eta y' + \zeta z' = vr\cos(v,r') = vr\cos(\mathfrak{x}r') = vr(gs_2 + \gamma\sigma_2 o)$$

[letzteres gemäss der Gleichung 37)] endlich

$$xx' + yy' + zz' = r^2\cos(r,r') = r^2 s_2.$$

Substituirt man dies in den obigen Ausdruck für v'^2, so folgt

$$v'^2 = v^2 + r^2\frac{1 - s_2}{2} + vrg(1 - s_2) - vr\gamma\sigma_2 o$$

oder wenn man für s_2 und σ_2 Cosinus und Sinus des einfachen Winkels einführt

$$v'^2 = v^2 + 2vr(g\sigma^2 - \gamma s\sigma o) + r^2\sigma^2 \qquad 43)$$

und endlich durch Vertauschung von s mit $-\sigma$ und σ mit s

$$v'^2_1 = v^2 + 2vr(gs^2 + \gamma s\sigma o) + r^2 s^2. \qquad 44)$$

Man sieht, dass v' und v'_1 in der That den Winkel K nicht enthalten, wovon bereits Gebrauch gemacht wurde.

Wir haben jetzt in der Gleichung 29) nur noch die Producte $\xi'\eta'$ und $\xi'_1\eta'_1$ durch die Integrationsvariabeln auszudrücken. Wir erhalten nach 41)

$$\xi'\eta' = \xi\eta + \xi\frac{y - y'}{2} + \eta\frac{x - x'}{2} + \frac{(x - x')(y - y')}{4},$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

ferner ist $\xi = va$, $\eta = v\alpha\beta$ und nach 35) und 39)

$$x - x' = 2r(ag\sigma^2 - \alpha\gamma k\sigma^2 - a\gamma s\sigma o - agks\sigma o - \alpha\varkappa s\sigma\omega) \quad 45)$$

$$y - y' = 2r(\alpha\beta g\sigma^2 + b\gamma\varkappa\sigma^2 + a\beta\gamma k\sigma^2 - \alpha\beta\gamma s\sigma o + bg\varkappa s\sigma o + a\beta gks\sigma o - bks\sigma\omega + a\beta\varkappa s\sigma\omega) \quad 46)$$

Um nicht allzulange Ausdrücke anschreiben zu müssen, wollen wir uns nicht das Product $\xi'\eta'$, sondern sogleich den Ausdruck $\frac{1}{\pi a\alpha\beta}\int_0^{2\pi}\xi'\eta' dK$ bilden. Wir haben wegen

$$\int_0^{2\pi} k^2 dK = \int_0^{2\pi}\varkappa^2 dK = \pi, \quad \int_0^{2\pi} k dK = \int_0^{2\pi}\varkappa dK = \int_0^{2\pi} k\varkappa dK = 0 \quad 47)$$

$$\frac{1}{\pi a\alpha\beta}\int_0^{2\pi}\xi\eta dK = 2v^2 \quad 48)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi a\alpha\beta}\int_0^{2\pi}\xi\frac{y-y'}{2}\,dK = 2vr(g\sigma^2 - \gamma s\sigma o)\\
&\frac{1}{\pi a\alpha\beta}\int_0^{2\pi}\eta\frac{x-x'}{2}\,dK = 2vr(g\sigma^2 - \gamma s\sigma o)\\
&\frac{1}{\pi a\alpha\beta}\int_0^{2\pi}\frac{(x-x')(y-y')}{4}\,dK = r^2[2(g\sigma^2 - \gamma s\sigma o)^2 -\\
&-(\gamma\sigma^2 + gs\sigma o)(\gamma\sigma^2 + gs\sigma o - \frac{bs\sigma\omega}{a\beta}) - s\sigma\omega(\frac{b\gamma\sigma^2}{a\beta} + \frac{bgs\sigma o}{a\beta} + s\sigma\omega)],
\end{aligned} \quad 49)$$

ferner muss noch bemerkt werden, dass der in der letzten Gleichung erscheinende Ausdruck in der Gleichung 29), wofern nur φ eine rationale Function ist, blos mit einer rationalen Function von $o = \cos \boldsymbol{O}$ multiplicirt und dann bezüglich $\boldsymbol{O}$ von 0 bis 2π integrirt erscheint. Wir können also darin alle Glieder mit ungeraden Potenzen von $\omega = \sin \boldsymbol{O}$ weglassen und erhalten, wenn wir den so reducirten Ausdruck in eine eckige Klammer einschliessen:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi a\alpha\beta}\int_0^{2\pi}\frac{(x-x')(y-y')}{4}\,dK =\\
&= r^2[2(g\sigma^2 - \gamma s\sigma o)^2 - (\gamma\sigma^2 + gs\sigma o)^2 - s^2\sigma^2\omega^2]\\
&= r^2\sigma^2[\sigma^2(2g^2 - \gamma^2) - 6s\sigma o g\gamma + s^2 o^2(2\gamma^2 - g^2) - s^2\omega^2) =\\
&= r^2\sigma^2[\sigma^2(3g^2 - 1) + s^2(3\gamma^2 o^2 - 1) - 6s\sigma o g\gamma]
\end{aligned} \quad 50)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Fasst man dies alles zusammen, so kann jetzt die Gleichung 29) folgendermassen geschrieben werden:

$$2hq = \frac{\pi C^2 e^{-hv^2}}{v^2} \int_0^\infty r^3 dr \int_0^\pi \gamma dG e^{-h(r^2+2vrg)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} s\sigma dS \int_0^{2\pi} d0 \times$$
$$\{\varphi(v'^2).J + \varphi(v'_1{}^2)J_1 - 2v^2\varphi(v^2) - [2v^2 + 4vrg + r^2(3g^2-1)]\times \quad 51)$$
$$\varphi(v^2 + r^2 + 2vrg)\},$$

worin

$$v'^2 = v^2 + 2vr(g\sigma^2 - \gamma s\sigma o) + r^2\sigma^2 \quad 52)$$

$$v'_1{}^2 = v^2 + 2vr(gs^2 + \gamma s\sigma o) + r^2 s^2 \quad 53)$$

$$J = 2v^2 + 4vr(g\sigma^2 - \gamma s\sigma o) + r^2\sigma^2[\sigma^2(3g^2-1) + s^2(3\gamma^2 o^2 - 1) - 6s\sigma o g\gamma] =$$
$$= 2v^2 + 4vr\sigma(g\sigma - \gamma so) + r^2\sigma^2[3(g\sigma - \gamma so)^2 - 1] \quad 54)$$

$$J_1 = 2v^2 + 4vr(gs^2 + \gamma s\sigma o) + r^2 s^2[s^2(3g^2-1) + \sigma^2(3\gamma^2 o^2 - 1) + 6s\sigma o g\gamma] =$$
$$= 2v^2 + 4vrs(gs + \gamma\sigma o) + r^2 s^2[3(gs + \gamma\sigma o)^2 - 1]. \quad 55)$$

Die Aufgabe ist also vollständig gelöst, wenn es gelingt, die Function φ so zu bestimmen, dass die Gleichung 51) erfüllt wird. Die Function φ darf ausserdem keine solchen Irrationalitäten erhalten, dass $\int_0^{2\pi} \varphi(v'^2).\omega d\boldsymbol{O}$ oder $\int_0^{2\pi} \varphi(v'^2_1).\omega d\boldsymbol{O}$ von Null verschieden ausfiele. Obwohl die Gleichung auch in dieser Form an Complicirtheit nichts zu wünschen übrig lässt, so ist dieselbe doch schon weit übersichtlicher, als die Gleichung 44) meiner weiteren Studien.

Es ist mir noch bisher nicht gelungen, die Function φ in geschlossener Form zu bestimmen. Doch hat es keine Schwierigkeit, die Reihenentwicklung derselben nach Potenzen von v^2 aus der Gleichung 51) zu finden, indem man setzt

$$\varphi(v^2) = \sum_{n=\infty}^{n=\infty} c_n v^{2n} \quad 56)$$

und die Coëfficienten der Reihe nach berechnet, und ich will diese Rechnung, welche zwar weitläufig, aber durchaus nicht unausführbar erscheint, sowie auch die Anwendung der eben entwickelten Principien auf die Diffusion zweier Gase und die Wärmeleitung einer nächsten Abhandlung vorbehalten. Hat man einmal die Function φ bestimmt, so findet man nach Gleichung 2)

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$
\left.
\begin{aligned}
M &= m\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\!\iiint d\xi d\eta d\zeta \,.\, \xi\eta C[1+2hqy\xi+\xi\eta\varphi]e^{-hv^2} = \\
&= Cm\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\!\iiint d\xi d\eta d\zeta \,.\, \xi^2\eta^2\varphi(v^2)\,.\,e^{-hv^2} \\
&= Cm\int_0^{\infty} v^2 dv \int_0^{\pi} \alpha dA \int_0^{2\pi} dB\,.\,v^4 a^2\alpha^2\beta^2\,.\,e^{-hv^2}\,.\,\varphi(v^2) = \\
&= \frac{4\pi}{15}\,Cm\int_0^{\infty} v^6 e^{-hv^2}\,.\,\varphi(v^2)dv = \frac{4\pi}{15}\,Cm\,.\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n\int_0^{\infty} v^{2n+6}e^{-hv^2}dv = \\
&= \frac{2\pi^{3/2}}{15}\,\frac{Cm}{\sqrt{h}}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n+5)}{2^{n+3}h^{n+3}}\,.\,c_n,
\end{aligned}
\right\} \quad 57)
$$

woraus folgt

$$\mu = -\frac{M}{q} = -\frac{2\pi^{3/2}}{15}\,\frac{Cm}{q\sqrt{h}}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1.3.5\ldots(2n+5)}{2^{n+3}h^{n+3}}\,.\,c_n, \qquad 58)$$

wobei freilich die Convergenz der Reihe noch nicht bewiesen ist.

Um ein Beispiel zu geben, wie die obigen Formeln auf synthetischem Wege gefunden werden können, will ich die Formeln 51) und 53) auch auf letzterem Wege berechnen.

Stelle in Fig. 4) OP in Grösse und Richtung die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des von beiden Molekülen gebildeten Systemes dar, welche durch den Zusammenstoss nicht verändert wird, so ist, weil die Massen beider Moleküle gleich sind

$$PV = PV' = PV_1 = PV'_1 = \frac{r}{2} = \frac{r'}{2};$$

daher ist die Figur $VV_1V'V'_1$ ein Rechteck, in welchem

$$VV'_1 = r\cos(VV'_1V') = rs,$$
$$VV' = r\sin(VV'_1V') = r\sigma$$

ist. Nun findet man aus dem Dreiecke VOV'_1

$$OV'^2_1 = OV^2 + VV'^2_1 + 2OV.VV'_1\cos(OV, VV'_1).$$

Bezeichnet man den Halbirungspunkt des grössten Kreisbogens RR' mit H, so ist VV'_1 parallel mit OH, daher kann die obige Gleichung folgendermassen geschrieben werden:

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$v_1'^2 = v^2 + r^2 s^2 + 2vrs\cos(OV, OH), \tag{59}$$

(der letztere Winkel ist das Supplement zum Winkel OVV_1').

Diese Formel geht sofort in die Formel 53) über, wenn man $\cos(OV, OH)$ aus dem sphärischen Dreiecke $HR\mathfrak{x}$ der Fig. 4 berechnet, welches liefert

$$\cos(OV, OH) = sg + \sigma\gamma o.$$

Ähnlich liefert das Dreieck VOV'

$$OV'^2 = OV^2 + VV'^2 - 2OV.\,VV'\cos(OVV')$$

wobei der Winkel OVV' wieder das Supplement zu $\text{arc}(OV, VV')$ ist. Zieht man von O aus eine Gerade OH_1 parallel und gleichgerichtet mit $V'V$, so ist $\text{arc}(O\mathfrak{x}, OH_1) = \text{arc}(OVV')$, daher

$$v'^2 = v^2 + r^2\sigma^2 - 2vr\sigma\cos(OV, OH_1) \tag{60}$$

und da der grösste Kreisbogen RH_1 offenbar gleich $90° + S$ ist, so folgt aus dem sphärischen Dreiecke $\mathfrak{x}RH_1$

$$\cos(V, H_1) = -g\sigma + \gamma s o,$$

woraus man sofort die Formel 52) erhält.

In ähnlicher Weise findet man

$$\begin{aligned} \xi' &= va - r\sigma\cos(H_1, X), \quad \eta' = v\alpha\beta - r\sigma\cos(H_1, Y), \\ \zeta' &= v\alpha b - r\sigma\cos(H_1, Z) \\ \xi_1' &= va + rs\cos(H, X), \quad \eta_1' = v\alpha\beta + rs\cos(H, Y), \\ \zeta_1' &= v\alpha b + rs\cos(H, Z) \end{aligned} \tag{61}$$

woraus man wieder leicht $\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$ und $\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2$ bilden kann. Ferner kann man die Ausdrücke für J und J_1 auch so schreiben

$$\begin{aligned} J &= 2v^2 + 4vr\sigma\cos(H_1, V) + r^2\sigma^2[3\cos^2(H_1, V) - 1] \\ J_1 &= 2v^2 + 4vrs\cos(H, V) + r^2 s^2[3\cos^2(H, V) - 1]. \end{aligned} \tag{62}$$

IV. Behandlung desselben Problems in der Ebene.

Bei neuartigen Problemen, wo die zweckmässigste Behandlungsweise noch nicht gefunden ist, wie dies bei dem hier behandelten der Fall ist, scheint mir eine möglichst vielseitige Beleuchtung jeder neuen möglichen Auflösungsmethode wünschenswerth. Ich habe desshalb dasselbe Problem in der Ebene behandelt,

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

d. h. die Bewegung der elastischen Kreise in einer unendlichen Ebene oder elastischer Kreiscylinder im Raume, deren Axen zu Anfang parallel und deren darauf senkrechte Endflächen ursprünglich in je einer Ebene lagen. Wenn auch dieses Problem keine physikalische Bedeutung hat, so glaube ich doch meine diesbezüglichen Rechnungen mittheilen zu sollen wegen der engen Beziehung, in welcher dieses Problem mit dem früher behandelten steht. Man sieht leicht, dass in diesem Falle die Gleichung 15) folgende Form annimmt:

$$\frac{df}{dt} + \xi\frac{df}{dx} + \eta\frac{df}{dy} + X\frac{df}{d\xi} + Y\frac{df}{d\eta} = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty}\int d\xi_1 d\eta_1 \int_{-\delta}^{+\delta} r(f'f'_1 - ff_1)dp \qquad 63)$$

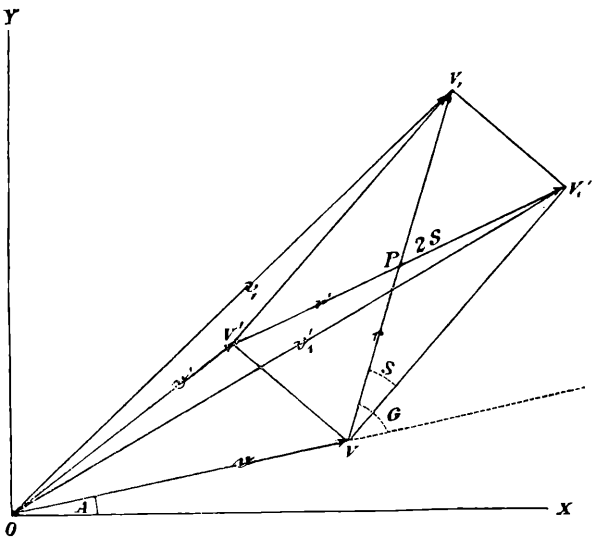
Wir setzen wieder $X = Y = 0$,

$$f = C[1 + 2hq\xi y + \xi\eta\varphi(v^2)]e^{-hv^2}, \qquad 64)$$

wobei die beiden neben der Einheit in der eckigen Klammer stehenden Grössen als sehr klein vorausgesetzt werden sollen. Wir bezeichnen ferner, wie früher, die Geschwindigkeiten der beiden Moleküle vor und nach dem Stosse (Fig. 6) mit

$$v = OV,\ v_1 = OV_1,\ v' = OV',\ v'_1 = OV'_1,$$

Fig. 6.

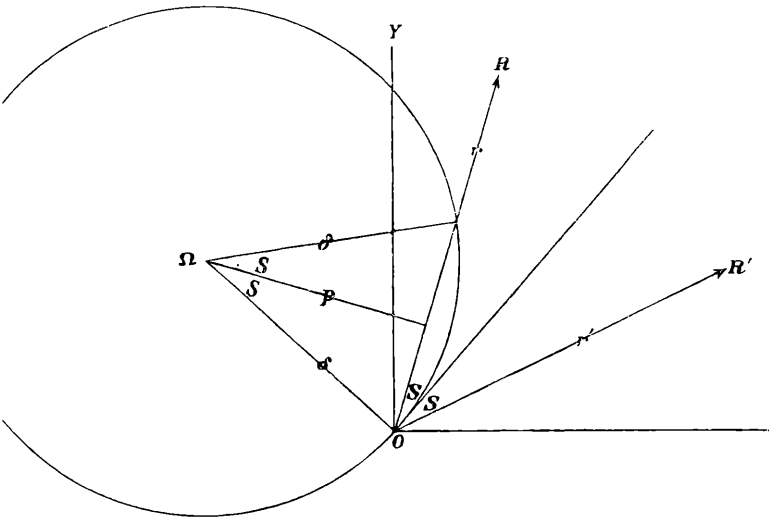


©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

die relativen Geschwindigkeiten vor und nach dem Stosse mit $r = VV_1$ und $r' = V'V_1'$. A,G und $2S$ sind die Winkel (OX, OV), (OV, VV_1), $(V'V_1', VV_1)$.

Die Richtung der Centrallinie der Moleküle im Momente des Zusammenstosses halbirt daher das Supplement VPV_1' des Winkels $2S$. Der Punkt P halbirt beide Relativgeschwindigkeiten. In Fig. 7 ist die Relativbewegung beider Kreise dargestellt, bei

Fig. 7.



welcher das Centrum des ersten Kreises im Punkte Ω ruht; das des zweiten kommt aus der Richtung OR und schlägt, nach dem Stosse die Richtung OR' ein; ΩO ist die Lage und Länge der Verbindungslinie der Centra beider Kreise im Momente des Zusammenstosses, also gleich lang, wie der Durchmesser δ eines der Kreise.

Man hat $p = \delta \cos S$, $d\xi_1 d\eta_1 = rdrdG$, $\xi = va$, $\eta = v\alpha$. Die Gleichung 63) verwandelt sich daher zunächst in folgende:

$$\frac{df}{dt} + va\frac{df}{dx} + v\alpha\frac{df}{dy} = \delta\int_0^\infty r^2 dr \int_{-\pi}^{+\pi} dG \int_0^\pi \sigma dS(f'f_1' - ff_1)$$

Substituirt man hier den für f angenommenen Werth und dividirt die Gleichung durch $Ce^{-hv^2}.v^2 a\alpha$, so ergibt sich, weil

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

wieder $\xi'+\xi_1' = \xi+\xi_1$ ist

$$2hq = \frac{C\delta}{v^2}\int_0^\infty r^2\,dr \int_{-\pi}^{+\pi} d\,G \int_0^\pi \sigma dS \times \left[\frac{\xi'\eta'}{a\alpha}\varphi(v'^2) + \frac{\xi_1'\eta_1'}{a\alpha}\varphi(v_1'^2) - \frac{\xi\eta}{a\alpha}\varphi(v^2) - \frac{\xi_1\eta_1}{a\alpha}\varphi(v_1^2)\right].e^{-hv_1^2}. \quad 65)$$

Nun findet man unter Anwendung derselben Bezeichnungen wie früher

$$\left.\begin{aligned}
&\xi_1 - \xi = x = r\cos(A+G),\ \eta_1 - \eta = y = r\sin(A+G)\\
&\xi_1' - \xi' = x' = r\cos(A+G-2S) = xs_2 + y\sigma_2\\
&\eta_1' - \eta' = y' = r\sin(A+G-2S) = ys_2 - x\sigma_2\\
&\xi_1' + \xi' = \xi_1 + \xi = x + 2\xi,\ \eta_1' + \eta' = \eta_1 + \eta = y + 2\eta,\\
&\xi' = \xi + \frac{x-x'}{2} = \xi + x\sigma^2 - ys\sigma,\\
&\quad = \eta + \frac{y-y'}{2} = \eta + y\sigma^2 + xs\sigma\\
&\xi_1' = \xi + \frac{x+x'}{2} = \xi + xs^2 + ys\sigma,\\
&\eta_1' = \eta + \frac{y+y'}{2} = \eta + ys^2 - xs\sigma.
\end{aligned}\right\} \quad 66)$$

Man findet also wieder ξ_1' und η_1' aus ξ' und η', indem man darin $-\sigma$ für s und s für σ setzt.

Es ergibt sich jetzt leicht aus dem Dreiecke OVV_1' der Fig. 6

$$v_1'^2 = v^2 + r^2s^2 + 2vrs\cos(G-S) = v^2 + r^2s^2 + 2vrs^2g + 2vrs\sigma\gamma \quad 67)$$

und aus dem Dreiecke OVV' derselben Figur

$$v'^2 = v^2 + r^2\sigma^2 - 2vr\sigma\sin(G-S) = v^2 + r^2\sigma^2 + 2vr\sigma^2g - 2vrs\sigma\gamma. \quad 68)$$

Endlich findet man

$$\xi'\eta' = \frac{v^2}{2}\sin 2A + vr\sin S\cos(2A+G-S) - \frac{r^2\sin^2 S}{2}\sin 2(A+G-S) \quad 69)$$

$$\xi_1'\eta_1' = \frac{v^2}{2}\sin 2A + vr\cos S\sin(2A+G-S) + \frac{r^2\cos^2 S}{2}\sin 2\,.\,A+G-S. \quad 70)$$

Es sind nämlich ξ' und η' die Summen der Projectionen von OV und $VV' = r\sin S$ auf die x-, respective y-Axe, ξ_1' und η_1' die

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

entsprechenden Projectionen von OV und $VV_1' = r\cos S$ also

$$\begin{aligned}\xi' &= v\cos A - r\sin S\sin(A+G-S),\\ &= v\sin A + r\sin S\cos(A+G-S),\end{aligned} \quad 71)$$

$$\begin{aligned}\xi_1' &= v\cos A + r\cos S\cos(A+G-S),\\ \eta_1' &= v\sin A + r\cos S\sin(A+G-S).\end{aligned} \quad 72)$$

ξ_1, η_1, v_1 erhält man, indem man in ξ_1', η_1', v_1' setzt $S = o$.

Wenn wir nun das Integrale der Gleichung 65) in zwei Theile zerlegen und die Grösse in der eckigen Klammer mit E bezeichnen, so kann dieses dreifache Integrale auch so geschrieben werden:

$$\int_0^\infty r^2\,dr \int_0^\pi dG \int_0^\pi \sigma dS.E.e^{-hv_1^2} + \int_0^\infty r^2 dr \int_0^{-\pi} dG \int_\pi^0 \sigma dS E.e^{-hv_1^2}.$$

Jedes Glied des zweiten Integrals unterscheidet sich von dem entsprechenden des ersten nur dadurch, dass dG, dS, γ und s das entgegengesetzte Zeichen haben. Es haben also v_1^2, v'^2, $v_1'^2$, σ, g und das Product $dG.dS$ in beiden Integralen dasselbe Zeichen. Fasst man beide Integrale in eins zusammen, so werden alle Glieder von $\xi'\eta'$, $\xi_1'\eta_1'$ u. s. w., welche bezüglich der beiden Grössen γ und s von gerader Dimension sind, doppelt auftreten, die von ungerader dagegen verschwinden. Es nimmt also die Gleichung 65) folgende Gestalt an

$$\left.\begin{aligned} qh = \frac{C\delta e^{-hv^2}}{v^2}\int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi dG \int_0^\pi \sin S.dS.e^{-hr^2-2hrv\cos G}\times\\ \{[v^2-2vr\sin S\sin(G-S)-r^2\sin^2 S\cos(2G-2S)]\varphi(v'^2)+\\ +[v^2+2vr\cos S\cos(G-S)+r^2\cos^2 S\cos(2G-2S)]\varphi(v_1'^2)-\\ -[v^2+2vr\cos G+r^2\cos^2 S\cos 2G]\varphi(v_1^2)-v^2\varphi(v^2)\},\end{aligned}\right\} \quad 73)$$

Man kann behufs der Integration die Producte der Sinus in Summen von Sinus vielfacher Winkel, die Potenzen der Sinus in Sinus mehrfacher Winkel auflösen oder die früheren Bezeichnungen wieder einführen, nach welchen die in den eckigen Klammern stehenden Factoren von $\varphi(v'^2)$ und $\varphi(v_1'^2)$ die Werthe

$$\begin{aligned} &v^2+2vr(g\sigma^2-\gamma s\sigma)-r^2\sigma^2[(g^2-\gamma^2)(s^2-\sigma^2)-4g\gamma s\sigma]\\ &v^2+2vrs(gs+\gamma\sigma)\ +r^2s^2[(g^2-\gamma^2)(s^2-\sigma^2)-4g\gamma s\sigma]\end{aligned} \quad 74)$$

haben.